Mathématiques I

Suites & limites

Dr. Mucyo Karemera

Ce document a été préparé avec l'aide du Prof. Stéphane Guerrier

Assistants: G. Blanc, B. Poilane & H. Voegeli

BY NC SA

Suites & limites

L'∞ n'est pas un nombre mais on parvient tout de même à utiliser ce concept rigoureusement. Et c'est une des plus grande réussite de l'histoire des mathématiques.

Une grande partie des concepts abordés dans le cours et leurs applications reposent sur cette réussite.

Grâce à cette rigueur, on parvient à éviter les contradictions du types vu précédemment.

Que peut-on rigoureusement dire des expressions suivantes?

- $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \ ???$
- $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots = \ ???$

Suites

Définition.

*Une **suite réelle** est une relation qui associe à chaque élément $n \in \mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$) un et un seul nombre $u_n \in \mathbb{R}$.*

En d'autres termes, une suite est une **liste de nombre infinie** $(u_0, u_1, u_2, \ldots)$, dont chaque élément de la suite est appelé **terme**. On nomme u_n le **terme générique** de la suite.

Notation pour une suite

En général, on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n). **L'indice** (u_n) peut être changé par n'importe quelle autre lettre, et ainsi

$$(u_0, u_1, u_2, \ldots) = (u_n) = (u_k) = (u_m) = \ldots$$

Exemples:

- $(0, 1, 2, 3, \ldots) = (n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
- $(1, 4, -3.1, \ldots)$, pas de formule pour les autres termes
- capital obtenu au bout de n ans

Suites

Définition.

*Une **suite réelle** est une relation qui associe à chaque élément $n \in \mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$) un et un seul nombre $u_n \in \mathbb{R}$.*

Nous considérons des suites définies de deux manières

1) **par récurrence**, par exemple
   - $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n$, $\forall n \geq 1$, qui correspond à $(1, 2, 4, 8, 16, \ldots)$,
   - la suite de Fibonacci: $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $\forall n \geq 2$, qui correspond à $(1, 1, 2, 3, 5, \ldots)$,
2) **par une formule** pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$), par exemple,
   - $u_n = c$, $\forall n \in \mathbb{N}$, où $c \in \mathbb{R}$, correspond à $(c, c, c, c \ldots)$. On dit que ces suites sont **constantes**[1],
   - $u_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
   - $u_n = \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

[1] Par exemple si $c = 1$, on a $u_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Constantes et variables

Étant donné un problème mathématique, on distingue souvent deux quantités de nature différente: les **constantes** et les **variables**.

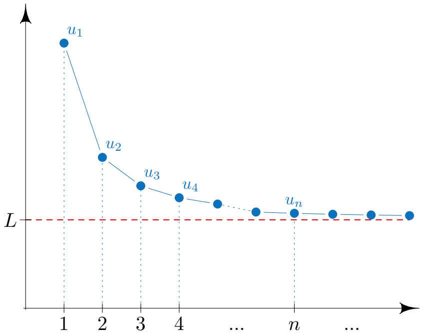
Comment les différentier? En général, on peut dire que

- les constantes **gardent la même valeur** tout au long du problème,
- les variables **prennent des valeurs différentes** tout au long du problème.

Il est d'usage de noter les constantes par les premières lettres de l'alphabet et les variables par les dernières. Attention toutefois, il est fréquent que cette "règle" ne s'applique pas. Ainsi, il est important de comprendre le problème en question pour pouvoir déterminer quelle quantité est constante et quelle quantité est variable.

Limite d'une suite

La limite $L \in \mathbb{R}$ d'une suite (u_n), lorsqu'elle existe, peut visuellement se représenter comme suit



On remarque qu'à mesure que n grandit, la valeur de u_n s'approche de L.

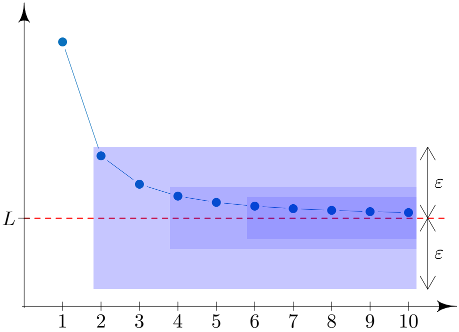
Limite d'une suite

Formellement, cela correspond à

Définition (limite d'une suite).

*On dit que la suite (u_n) **tend vers la limite** L, et on note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$, si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \geq 0 \textit{ tel que } \forall n \geq N \textit{ on a } |u_n - L| < \varepsilon.$$



Limite d'une suite: convergence / divergence

On dit que la suite (u_n) est **convergente** s'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$.
Dans le cas contraire, on dit que la suite (u_n) est **divergente**.

Remarques:

- Une suite (u_n) convergente **possède une unique limite**.
- Une suite (u_n) est **divergente si**
  - $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$,
  - $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$,
  - u_n ne tend vers aucune limite.

Exemples:

- la suite $u_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots n$, diverge et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
- la suite $u_n = \underbrace{1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \pm 1}_{n \text{ termes}}$, diverge et **n'a pas de limite**.

Une preuve formelle de convergence

On montre formellement, en utilisant la définition, que la suite donnée par la formule $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ converge vers 0, i.e.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Ainsi, $\forall n \geqslant N$, on a

$$n \geqslant N > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Par conséquent
$$|u_n - 0| = u_n < \varepsilon.$$

Notation

Le symbole "$\Rightarrow$" ci-dessus se lit "donc" ou "ainsi". C'est le symbole de l'implication.

On peut aussi formellement montrer que **toute suite constante** $u_n = c$, ($\forall n \in \mathbb{N}$, où $c \in \mathbb{R}$) **est convergente** avec $\lim_{n \to \infty} u_n = c$ (exercice).

Comment calculer la limite d'une suite convergente?

Il est en général **très dur** de montrer qu'une suite converge ou diverge en **utilisant** uniquement la **définition formelle**.

Les deux théorèmes qui suivent permettent de calculer des limites de suites sans avoir à utiliser la définition formelle.

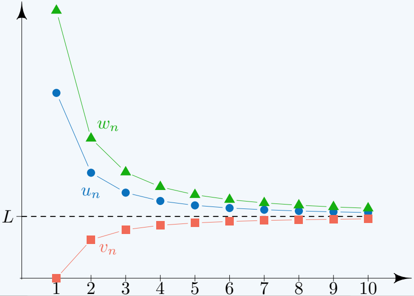
Théorème (Théorème du sandwich).

Si $(u_n), (v_n)$ *et* (w_n) *sont des suites telles que*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = L = \lim\limits_{n\to\infty} w_n$,

2) $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Alors $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L}$.



Propriétés des limites

Théorème (Propriétés des limites).

Si les suites (u_n) *et* (v_n) ***sont convergentes****, alors on a*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n + \lim\limits_{n\to\infty} v_n$,
2) $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n \cdot v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

En particulier: si $c \in \mathbb{R}$, *alors*

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot u_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} u_n$

Si de plus $\lim\limits_{n\to\infty} v_n \neq 0$ *alors on a*

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to\infty} v_n}$

Ces propriétés peuvent s'étendre au cas où l'une des deux suites, par exemple (u_n), diverge avec $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$ (exo).

Calcul de limite

On considère la suite définie par la formule: $u_n = \frac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

1) On sait que les suites $v_n = 0$ et $w_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, sont telles que
   - $\lim_{n\to\infty} v_n = 0 = \lim_{n\to\infty} w_n$
   - $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ puisque $0 \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n}$.

   On peut donc utiliser le théorème du sandwich pour conclure que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

2) On peut aussi considérer la suite $w_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, qui est telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Puisque $u_n = w_n \cdot w_n$, on peut conclure en utilisant le théorème sur les propriétés des limites, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) \overset{2)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Suite arithmétique

Définition.

*Une **suite arithmétique** de raison $r \in \mathbb{R}$ est définie par:*

$$u_n = u_0 + n \cdot r, \quad \text{où } u_0 \in \mathbb{R}.$$

Théorème.

- *Si $r \neq 0$, la suite arithmétique diverge.*
- *Si $r = 0$, la suite arithmétique est constante $(u_n = u_0)$, et $\lim u_n = u_0$*

Exemple: intérêts simples

On dispose d'un capital $u_0 = 200$chf placé sur un compte bancaire au taux d'intérêt annuel de 2%. On suppose que ces intérêts sont uniquement calculés sur le capital initial u_0. Le capital obtenu après $n = 1, 2$ et 10 ans est

- $\underbrace{u_1}_{u_n} = \underbrace{200}_{u_0} + \underbrace{1}_{n} \cdot \underbrace{\frac{2}{100} \cdot 200}_{r \neq 0} = 204$
- $u_2 = 200 + 2 \cdot \frac{2}{100} \cdot 200 = 208$
- $u_{10} = 200 + 10 \cdot \frac{2}{100} \cdot 200 = 240$

Suite géométrique

Définition.

Une suite géométrique de raison r est définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par:

$$u_n = u_0 \cdot r^n, \quad \text{où } u_0 \in \mathbb{R}.$$

Théorème.

- *si $|r| > 1$ ou $r = -1$, la suite géométrique diverge,*
- *si $r = 1$, la suite géométrique est constante $(u_n = u_0)$, et $\lim u_n = u_0$,*
- *si $|r| < 1$, la suite géométrique converge, et $\lim u_n = 0$.*

Suite géométrique

Exemple: intérêts composés

On dispose d'un capital $u_0 = 200$chf placé sur un compte bancaire au taux d'intérêt annuel de 2%. On suppose que ces intérêts sont calculés sur le capital accumulé précédemment, i.e. u_{n-1} pour u_n. Le capital obtenu après $n = 1, 2$ et 10 ans est

- $u_1 = \underbrace{200}_{u_0} + \frac{2}{100} \cdot 200 = 200 \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{2}{100}\right)}_{r>0} = 204$
- $u_2 = \underbrace{204}_{u_1} + \frac{2}{100} \cdot 204 = 204 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right) = 200 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^2 = 208.08$
- $u_{10} = 200 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^{10} = 243.7989.$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{3n}\right)^n = ??$$

Et quand on est vraiment perdu... il y a Wolfram alpha.