Mathématiques I

Signe de sommation / Notation Σ

Dr. Mucyo Karemera

Ce document a été préparé avec l'aide du Prof. Stéphane Guerrier

Assistants: G. Blanc, B. Poilane & H. Voegeli

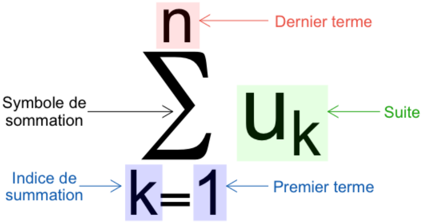
L'utilité

La **notation** $\sum$ permet d'écrire de façon compact (et même élégante), de longues sommes finies ou infinies

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 10,$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 49,$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100.$$

Elle nous permet essentiellement de nous passer des "..." ci-dessus.

La notation $\sum$



Cette notation doit être lu comme un algorithme.

$$\sum_{k=1}^{5} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

début à $k = 1$

puis $k = 2$

puis $k = 3$

puis $k = 4$

enfin $k = 5$

Fin!

$$= 15$$

Résultat de la somme

La notation $\sum$

$$\sum_{k=1}^{5} k = 1+2+3+4+5$$

début à $k=1$

puis $k=2$

puis $k=3$

puis $k=4$

enfin $k=5$
Fin!

$$= 15$$

Résultat de la somme

On a donc les égalités suivantes:

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k = 1+2+3+4+\ldots+10,$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k = 1+2+3+4+\ldots+100,$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{49} k = 1+2+3+4+\ldots+49,$
- $\displaystyle\sum_{k=4}^{100} k = 4+5+6+7+\ldots+100.$

La notation $\sum$

L'indice de sommation ne doit pas nécessairement être k. Ainsi on a, par exemple,

$$\sum_{n=1}^{10} n = \sum_{k=1}^{10} k = \sum_{i=1}^{10} i.$$

Attention toutefois si la suite ne dépend pas de l'indice de sommation, comme dans les exemples qui suivent:

$$\sum_{k=1}^{10} c = \underbrace{c + c + c + \ldots + c}_{10 fois} = 10c$$

$$\sum_{k=1}^{10} x = \underbrace{x + x + x + \ldots + x}_{10 fois} = 10x$$

$$\sum_{n=1}^{10} 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{10 fois} = 10$$

Exemples

- $\sum_{k=0}^{5} u_k$, pour $u_k = (-1)^k$.

$$\sum_{k=0}^{5}(-1)^k = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5$$
$$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 = 0.$$

- $\sum_{k=0}^{4} u_k$, pour $u_k = 2k - 3$.

$$\sum_{k=0}^{4} 2k - 3 = (2 \cdot 0 - 3) + (2 \cdot 1 - 3) + (2 \cdot 2 - 3) + (2 \cdot 3 - 3) + (2 \cdot 4 - 3)$$
$$= (-3) + (-1) + 1 + 3 + 5 = 5.$$

- $\sum_{k=0}^{2} u_k$, pour $u_k = \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+3)}$.

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+3)} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{-1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} = \frac{40 - 15 + 8}{120} = \frac{33}{120} = \frac{11}{40}.$$

Exemples

Comment écrire la somme $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$ à l'aide du signe $\sum$?

$$\begin{aligned}
1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots &= 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\\
&=1+(-1)\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+(-1)\frac{1}{7}+\cdots\\
&=1+(-1)^{1}\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+(-1)^{3}\frac{1}{7}+\cdots\\
&=(-1)^{0}1+(-1)^{1}\frac{1}{3}+(-1)^{2}\frac{1}{5}+(-1)^{3}\frac{1}{7}+\cdots\\
&=(-1)^{0}\frac{1}{2\cdot 0+1}+(-1)^{1}\frac{1}{2\cdot 1+1}+(-1)^{2}\frac{1}{2\cdot 2+1}+(-1)^{3}\frac{1}{2\cdot 3+1}+\cdots\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{2k+1}.
\end{aligned}$$

Remarque.

Il n'y a pas unicité dans l'écriture. En effet, on a aussi

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}$$