

# Mathématiques I

## Séries

Dr. Mucyo Karemera

Ce document a été préparé avec l'aide du Prof. Stéphane Guerrier

Assistants: G. Blanc, B. Poilane & H. Voegeli



# Séries

## Définition (Série).

Étant donné une suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , on considère on appelle **série** de terme général  $u_k$ , l'expression formelle suivante:  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ .

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_0 + u_1 + \dots + u_n) = u_0 + u_1 + \dots$$

La suite  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par la formule  $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$  est appelée **la suite des sommes partielles** de la série.

On dit que la série  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  **est convergente** de limite  $L \in \mathbb{R}$ , si la suite  $(s_n)$  tend vers  $L$ , i.e.

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L.$$

On dit que la série  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  **est divergente** si la suite  $(s_n)$  diverge.

## Notation

On note  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k < \infty$  pour dire qu'une série converge sans désigner sa limite (qui peut être connue ou inconnue).



## Remarque.

La convergence ou la divergence d'une série n'est pas affecté par une modification ou une suppression d'un nombre fini de termes. En particulier, si  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k < \infty$  alors  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty$ ,  $\sum_{k=56}^{\infty} u_k < \infty$ , ou encore  $\sum_{k=120}^{\infty} u_k < \infty$ . En math, cette phrase s'écrit

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k < \infty, \sum_{k=56}^{\infty} u_k < \infty, \sum_{k=120}^{\infty} u_k < \infty$$

Il suit naturellement de la définition des séries et du théorème sur les propriétés des limites de suites que :

## Théorème (opérations sur les séries convergentes).

Si  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = L_1 < \infty$  et  $\sum_{k=0}^{\infty} v_k = L_2 < \infty$  alors

- 1)  $\sum_{k=0}^{\infty} (u_k + v_k) = L_1 + L_2 < \infty$  et  $\sum_{k=0}^{\infty} (u_k - v_k) = L_1 - L_2 < \infty$ ,
- 2)  $\sum_{k=0}^{\infty} c \cdot u_k = c \cdot L_1 < \infty, \forall c \in \mathbb{R}$ .



## Critères de convergence (divergence)

Si une série  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  converge (i.e.  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k < \infty$ ) alors la suite  $(u_k)$  tend nécessairement vers 0 (i.e.  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$ ). Cet énoncé est équivalent au suivant

### **Théorème (critère de divergence).**

*Si  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k \neq 0$  alors  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  diverge.*

Grâce à ce résultat on déduit facilement que

- 1) **Si  $(u_k)$  est une suite constante non nulle** alors la série  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  **diverge** et  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \pm\infty$ . Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} = +\infty.$$

- 2) Si  $u_k = (-1)^k$  alors  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  **diverge** et **n'a pas de limite**.



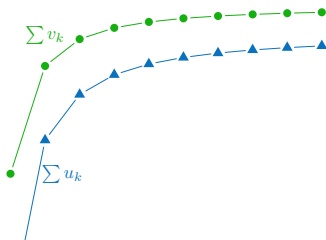
## Théorème (critère de comparaison).

Soient deux suites  $(u_k)$  et  $(v_k)$  telles que  $0 \leq u_k \leq v_k, \forall k \in \mathbb{N}$ . Alors on a

- $\sum_{k=0}^{\infty} v_k < \infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} u_k < \infty$
- $\sum_{k=0}^{\infty} u_k \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} v_k \text{ diverge}$

En d'autres termes, la convergence de la série  $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$  entraîne la convergence de la série  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ . La divergence de la série  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  entraîne la divergence de la série  $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ .

Ce résultat peut se comprendre comme une extension du théorème du sandwich pour les séries.



# Série harmonique (diverge)



En utilisant ces deux résultats, on peut montrer que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

## Faux critère de convergence pour les séries

Ce résultat montre que **la condition**  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$  **n'est pas suffisante** pour garantir que  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k < \infty$ .

# Série harmonique (diverge)

On montre que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

## Preuve

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \dots\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \frac{16}{32} + \dots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} = +\infty \end{aligned}$$

## Problème de Bâle: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = ?$

On peut montrer que cette série converge mais calculer sa limite est **beaucoup** plus compliqué. Euler a déterminé en 1741 que la limite est  $\frac{\pi^2}{6}$  !!

### Preuve

On veut montrer que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Tout d'abord, on remarque que  $\forall k \geq 2$  on a  $k^2 > k(k-1)$ . Par conséquent,  $\forall k \geq 2$

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$$

Ainsi, en utilisant le critère de comparaison, on a

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} < \infty \implies \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty^a.$$

<sup>a</sup>Cette phrase mathématique peut se traduire en français par :

Si  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$  converge alors  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  converge et donc  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  converge.



## Problème de Bâle: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} = ?$

Il suffit donc de montrer que  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} < \infty$ .

On remarque que  $\forall k \geq 2$  on a

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

On considère le terme générale de la suite des sommes partielles de la série, i.e.:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

On achève la preuve par le théorème s ur les propriétés des limites puisque

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = ?$$

Que dire de la convergence de  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$

Il suffit d'utiliser le critère de comparaison

En effet,  $\forall k \geq 1$ , on a  $k^3 \geq k^2$  et donc  $\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^2}$ . Ainsi, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Le même argument peut être utilisé pour montrer que :

1)  $\forall \alpha \geq 2$  on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty,$$

2)  $\forall \alpha \leq 1$ , sachant que  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ , on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty.$$



Et pour  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$  avec  $\alpha \in (1, 2)$ ?

On est parvenu à montrer que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = \begin{cases} \text{diverge} & \text{si } \alpha \leq 1 \\ \text{converge} & \text{si } \alpha \geq 2. \end{cases}$$

Et pour  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$  avec  $\alpha \in (1, 2)$ ? on "triche", merci théorème suivant

**Théorème (conv/div des séries de Riemann).**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = \begin{cases} \text{converge} & \text{si } \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \text{si } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

# Série géométrique



## Définition.

Une série géométrique est une série dont le terme général peut s'écrire sous la forme  $u_k = r^k$ , où  $r \in \mathbb{R}$ .

## Théorème (conv/div des séries géométriques).

La série géométrique converge si  $|r| < 1$ , et diverge si  $|r| \geq 1$ . Plus précisément, lorsque  $|r| < 1$ , on

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}.$$

## Remarque.

La formule pour les sommes partielles d'une série géométrique est souvent utile:  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on a

$$s_n = \sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$