Mathématiques I

Suites & limites: Exemples

Dr. Mucyo Karemera

Ce document a été préparé avec l'aide du Prof. Stéphane Guerrier

Assistants: G. Blanc, B. Poilane & H. Voegeli

Exemple 1

Grâce aux théorèmes du sandwich et des propriétés des limites, on peut facilement prouver le théorème suivant.

Théorème.

$$\forall c \in \mathbb{R}, \forall k \geqslant 1, \lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^k} = 0.$$

Preuve

En effet, $\forall n \geqslant 1$ et $\forall k \geqslant 1$ on a

1) $0 < n \leqslant n^k \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{n^k} \leqslant \frac{1}{n}$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}$, on a

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0.$$

2) Par le théorème sur les propriétés des limites, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^k} = c \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = c \cdot 0 = 0.$$

Exemple 2

Supposons connu le fait que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \cong 2.71$. Peut-on calculer

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right)^n ?$$

On remarque tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\frac{n^2+2n+1}{n^2} &= \frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \\ &= \left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2,\end{aligned}$$

et donc

$$\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right]^n = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Exemple 2

Comme la suite $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est convergente, on utilise la propriété 2) du théorème sur les propriétés des limites de suites convergentes comme suit

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&\overset{\text{thm.}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{e}\cdot\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{e} = e^2.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right)^n = e^2.$$