Mathématiques I

Séries: Exemples

Dr. Mucyo Karemera

Ce document a été préparé avec l'aide du Prof. Stéphane Guerrier

Assistants: G. Blanc, B. Poilane & H. Voegeli

Exemple 1

Étudions la convergence de $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{k}-1}$.

On sait que la série de Riemann $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ est divergente grâce au théorème du cours. Il en va donc de même pour cette même série amputée de son premier terme $\dfrac{1}{\sqrt{1}}$, autrement dit,

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty.$$

Or, $\forall k \geqslant 2$, on a $\frac{1}{\sqrt{k}-1} > \frac{1}{\sqrt{k}}$ et donc $\frac{3}{\sqrt{k}-1} > \frac{1}{\sqrt{k}}$. Le théorème de comparaison nous permet alors de conclure que

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{k}-1} = +\infty.$$

Exemple 2

Étudions la convergence de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{7}{k(k+1)}+\frac{2}{3^{k-1}}\right]$.

Si on parvient à montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{7}{k(k+1)}<\infty$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^{k-1}}<\infty$, on pourra alors utiliser le théorème sur les opérations sur les séries convergentes pour déterminer la somme voulue.

1) On calcul d'abord $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^{k-1}}$. On remarque qu'il s'agit d'une série géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ multipliée par la constante $c=2$. On calcul alors (puisque $\mid \frac{1}{3} \mid < 1$)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^{k-1}}=\sum_{k=1}^{\infty}2\cdot\frac{1}{3^{k-1}}\overset{indices}{=}\sum_{k=0}^{\infty}2\cdot\frac{1}{3^{k}}=2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^{k}}$$
$$=2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=2\cdot\frac{3}{2}=3.$$

Exemple 2

2) On calcul maintenant $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{k(k+1)}$. On remarque qu'il suffit de montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} < \infty$ puisque la série considérée n'en est qu'un multiple (avec $c = 7$). On remarque encore que $\forall k \geqslant 1$ on a

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

de sorte que $\forall n \geqslant 2$, la suite des sommes partielles (s_n) est donné par la formule

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] \\ &= \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Exemple 2

Dès lors, on a, grâce au théorème sur les propriétés des limites de suites convergentes,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}^{1} = 1 - 0 = 1.$$

Ainsi, par le théorème sur les opérations sur les séries convergentes, on conclut que,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} 7 \cdot \frac{1}{k(k+1)} = 7 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 7.$$

Enfin, par le théorème sur les opérations sur les séries convergentes encore, on obtient finalement,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{7}{k(k+1)} + \frac{2}{3^{k-1}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{k(k+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{k-1}} = 7 + 3 = 10.$$

---

[1] On peut utiliser le thm du sandwich pour montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ puisque $\forall n \geqslant 1$ on a $0 \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n}$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$