Mathématiques I

Limite de fonctions

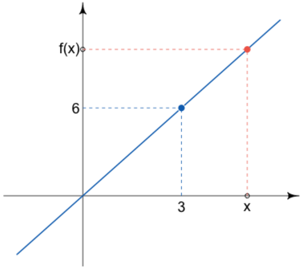
Dr. Mucyo Karemera

Ce document a été préparé avec l'aide du Prof. Stéphane Guerrier

Assistants: G. Blanc, B. Poilane & H. Voegeli

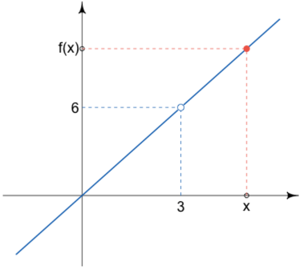
L'idée de base!

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2x$$



Lorsque x s'approche de 3, $f_1(x)$ s'approche de $6 = f_1(3)$.

$$f_2 : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{2x^2 - 6x}{x - 3}$$



Lorsque x s'approche de 3, $f_2(x)$ s'approche de $6 \neq f_2(3)$.

$f_2(3)$ n'est d'ailleurs pas défini!!

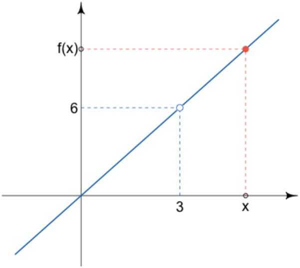
Notation

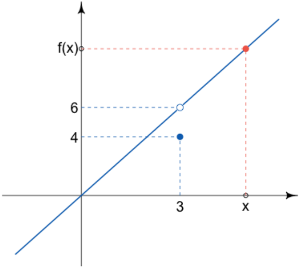
Dans les deux cas ci-dessus, on écrit $\lim_{x \to 3} f_1(x) = 6$ et $\lim_{x \to 3} f_2(x) = 6$.

L'idée de base!

$$f_2 : \mathbb{R}\setminus\{3\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{2x^2-6x}{x-3}$$

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x \neq 3 \\ 4 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$





On a clairement

$$\lim_{x\to 3} f_1(x) = \lim_{x\to 3} f_2(x) = \lim_{x\to 3} f_3(x) = 6.$$

Voisinage

Important!!!

En général, **lorsqu'on écrit** $\lim_{x \to a} f(x)$, où $a \in \mathbb{R}$, **il ne s'agit pas de déterminer** $f(a)$ (qui existe ou pas), mais plutôt de savoir si les valeurs $f(x)$ s'approche d'un nombre (disons $L \in \mathbb{R}$) à mesure que x s'approche de a.

En d'autres termes, on s'intéresse aux valeurs $f(x)$ pour x dans un voisinage de a.

Définition (Voisinage)

Un ***voisinage*** *de* $a \in \mathbb{R}$ *est un intervalle du type* $]a - \delta, a + \delta[$, *où* $\delta > 0$. *On notera* V_a *un tel ensemble.*

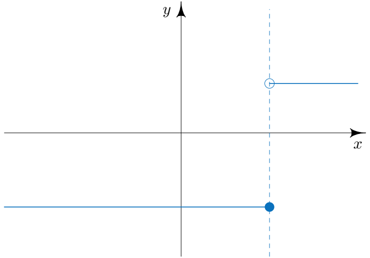
Dans le tableau ci-dessous, les valeurs des fonctions f_1, f_2 et f_3 au voisinage de 3 avec $\delta > 0.1$.

x	2.9	2.99	3	3.01	3.1
$f_1(x) = 2x$	5.8	5.98	6	6.02	6.2
$f_2(x)$	5.8	5.98	///	6.02	6.2
$f_3(x)$	5.8	5.98	4	6.02	6.2

Limite à gauche et à droite

Soit f une fonction et $a \in \mathbb{R}$ une valeur donnée. En général, le comportement de f peut différer selon que la variable x s'approche de a par la gauche ou par la droite, comme dans l'exemple ci-dessous

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} -3 & \text{si } x \leqslant 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases} \end{array}$$



Notation

Dans le cas ci-dessus, on écrit $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -3$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2$, **mais** $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ **n'existe pas**.

Définition formelle

Définition (formelle)

Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ ***tend vers*** *$L \in \mathbb{R}$* ***lorsque*** *x* ***tend vers*** *a, et on note $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \textit{ tel que } 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

On peut aussi adapter cette définition au cas où la limite est $+\infty$ (ou $-\infty$), et on écrit $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, si

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Ces définitions ne sont pas aisées à manipuler pour calculer des limites.

Il nous faut donc encore une fois des théorèmes pour nous aider à le faire.

Technique de factorisation

Théorème (Identification des limites)

Soient f, g deux fonctions et $a \in \mathbb{R}$. Supposons

- $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L \in \mathbb{R}$
- $\exists V_a$ *tel que* $\forall x \in V_a \setminus \{a\}$, $f(x) = g(x)$

alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Ce théorème confirme l'égalité

$$\lim_{x \to 3} f_1(x) = \lim_{x \to 3} f_2(x) = \lim_{x \to 3} f_3(x) = 6,$$

vu précédemment et justifie la technique de factorisation souvent utile pour calculer des limites.

Exemple

On considère $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 6}$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Que vaut $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$?

On remarque que $\forall x \in \mathcal{D}_f$ on a

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 6} = \frac{x^2(x-2)}{3(x-2)} \overset{x \neq 2}{=} \frac{x^2\cancel{(x-2)}}{3\cancel{(x-2)}} = \frac{x^2}{3} = g(x)$$

Or,

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \frac{4}{3}^{1} \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = \frac{4}{3},$$

par le théorème d'identification des limites.

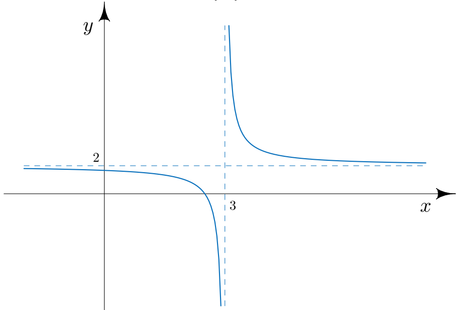
[1] par continuité, qu'on abordera au prochain cours

Limite à ∞

On peut aussi s'intéresser au comportement d'une fonction f lorsque x tend vers $\pm\infty$. Formellement, on écrit

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \text{ tel que } x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si
$$\forall N > 0, \exists M > 0 \text{ tel que } x > M \Rightarrow f(x) > N$$

Pour la fonction $f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$ on a $lim_{x\to+\infty} f(x) = 2 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$. On a aussi $lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$.



Technique de factorisation

Le théorème d'identification s'adapte au cas où l'on prend la limite en ∞.

Théorème (Identification des limites)

Soient f, g deux fonctions et $a \in \mathbb{R}$. Supposons

- $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = L$ *ou* $\pm\infty$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ ***suffisamment grand***, $f(x) = g(x)$

alors

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x)$$

Exemple:

On considère $f(x) = \frac{3x^2+2}{4x^2+10x-6}$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1/2\}$. On remarque que $\forall x > 1/2$ on a

$$f(x) = \frac{3x^2+2}{4x^2+10x-6} = \frac{\cancel{x^2}(3 + 2/x^2)}{\cancel{x^2}(4 + 10/x - 6/x^2)} = \frac{3 + 2/x^2}{4 + 10/x - 6/x^2} = g(x)$$

On conclut grâce aux propriétés des limites que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \frac{3+0}{4+0-0} = \frac{3}{4}$.

Propriétés des limites

Soient deux fonctions f et g dont on connaît la limite pour $x \to a, +\infty, -\infty$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors on a

- limite d'une somme

f	L_1	L_1	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g	L_2	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f+g$	$L_1 + L_2$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	indét.

- limite d'un produit

f	L_1	$L_1 > 0$	$L_1 < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
g	L_2	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$f \cdot g$	$L_1 \cdot L_2$	$\pm\infty$	$\mp\infty$	indét.	$\pm\infty$	$\mp\infty$

- limite d'un quotient

f	L_1	$L_1 \neq 0$	0	L_1	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
g	$L_2 \neq 0$	0	0	$\pm\infty$	$L_2 > 0$	$L_2 < 0$	0	$\pm\infty$	$\mp\infty$
$\frac{f}{g}$	$\frac{L_1}{L_2}$	∞[2]	indét.	0	$\pm\infty$	$\mp\infty$	∞[3]	indét.	indét.

[2] attention au signe de $g(x)$ au voisinage de a

[3] idem