Mathématiques I

Intégration

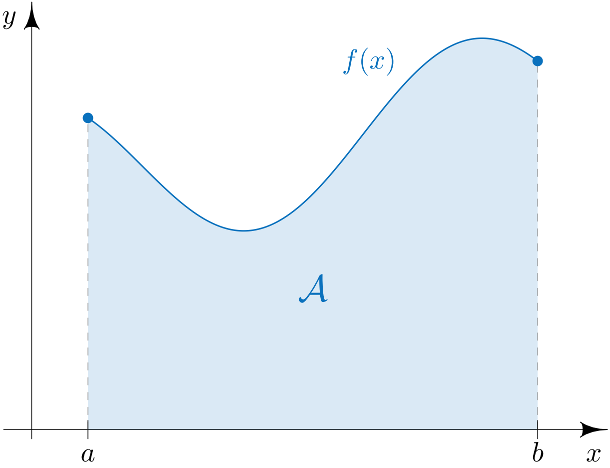
Prof. Stéphane Guerrier (enseignant), Dr. Mucyo Karemera

Matériel disponible en ligne: https://mkaremera-math1.netlify.app/

Licence: CC BY-NC-SA 4.0

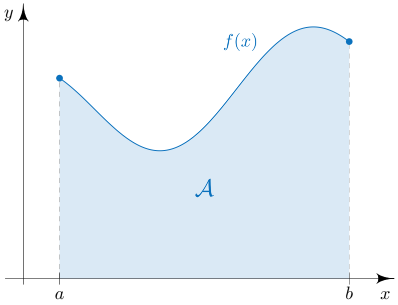
L'idée de base !

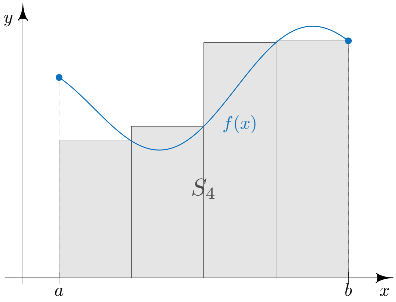
On considère une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On souhaite calculer l'aire sous la courbe du graphe de f entre a et b.



L'idée de base !

On considère une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On souhaite calculer l'aire sous la courbe du graphe de f entre a et b.



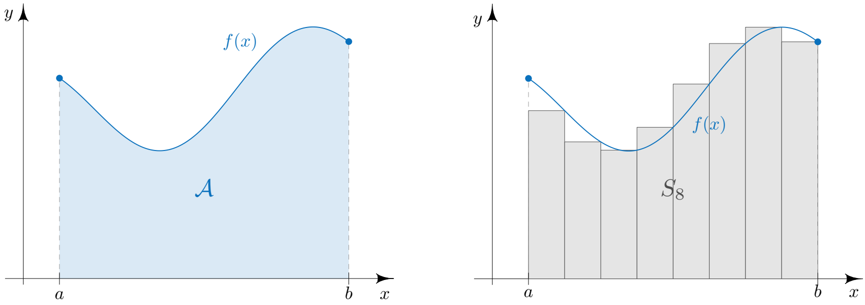


Pour ce faire, on approxime l'aire par une somme de rectangles.

<u>Intuition:</u> plus il y a de rectangles, meilleure est l'approximation.

L'idée de base !

On considère une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On souhaite calculer l'aire sous la courbe du graphe de f entre a et b.

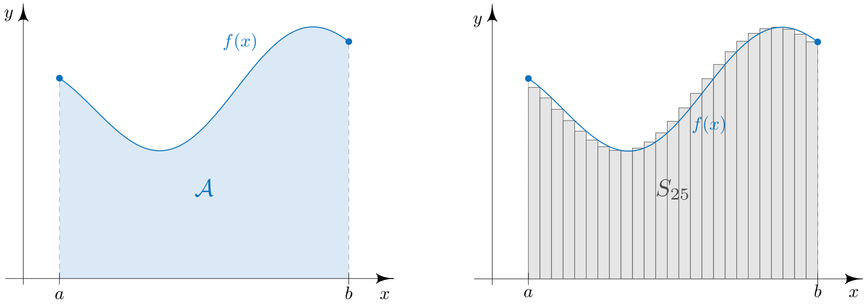


Pour ce faire, on approxime l'aire par une somme de rectangles.

Intuition: plus il y a de rectangles, meilleure est l'approximation.

L'idée de base !

On considère une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On souhaite calculer l'aire sous la courbe du graphe de f entre a et b.

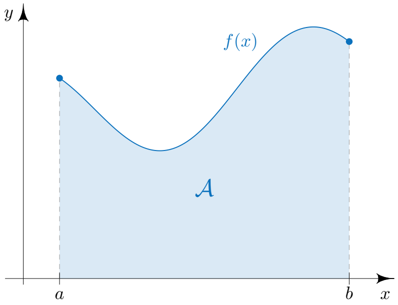


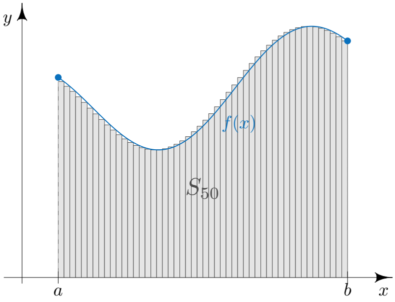
Pour ce faire, on approxime l'aire par une somme de rectangles.

Intuition: plus il y a de rectangles, meilleure est l'approximation.

L'idée de base !

On considère une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On souhaite calculer l'aire sous la courbe du graphe de f entre a et b.



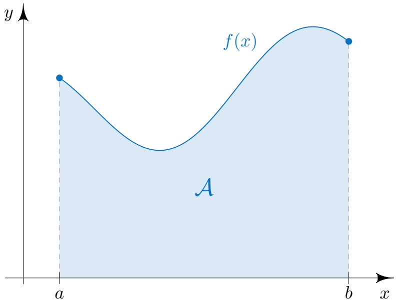


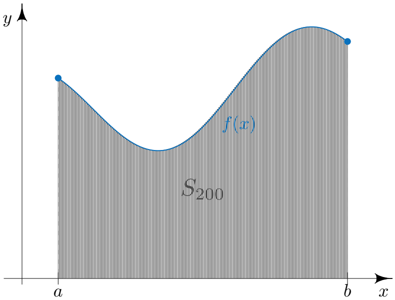
Pour ce faire, on approxime l'aire par une somme de rectangles.

<u>Intuition:</u> plus il y a de rectangles, meilleure est l'approximation.

L'idée de base !

On considère une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On souhaite calculer l'aire sous la courbe du graphe de f entre a et b.





Pour ce faire, on approxime l'aire par une somme de rectangles.

Intuition: plus il y a de rectangles, meilleure est l'approximation.

Définition (Intégrale définie).

La quantité $\mathcal{A}$ se note $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ et se nomme **l'intégrale définie** *de f sur $[a, b]$.*

Les sommes de Riemann

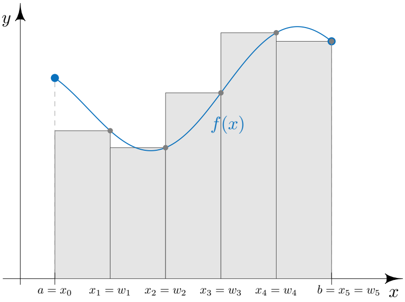
On formalise cette approximation de la façon suivante

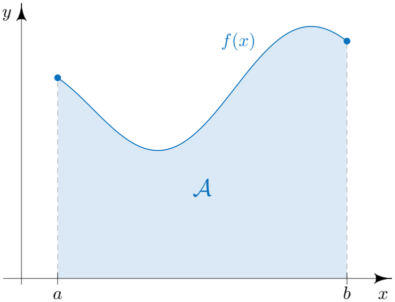
1) On subdivise l'intervalle $[a, b]$ en $n \in \mathbb{N}^*$ intervalles:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

2) $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, choisir un nombre, noté ω_k, dans l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ et on calcule la somme suivante, nommée somme de Riemann

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(\omega_k)(x_k - x_{k-1}) \approx \int_a^b f(x)dx$$





Fonctions intégrables

Les sommes de Riemann correspondent donc à une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Définition (Fonction intégrable).

On dit que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable sur $[a,b]$ si

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\omega_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}.$$

Théorème.

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est intégrable.

Remarques

1) **Le choix** des subdivisions de $[a,b]$ ainsi que des points ω_k **ne change pas** la convergence des sommes de Riemann lorsque f est intégrable.

2) Avec une subdivision équidistante de $[a,b]$, i.e. $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$, on obtient la formule suivante

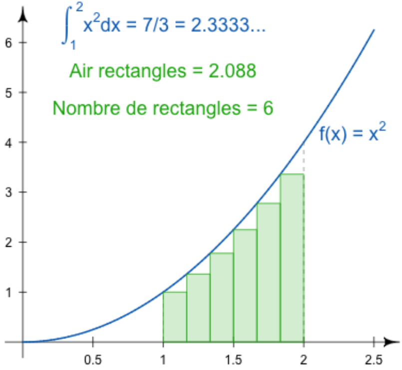
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(\omega_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\omega_k)$$

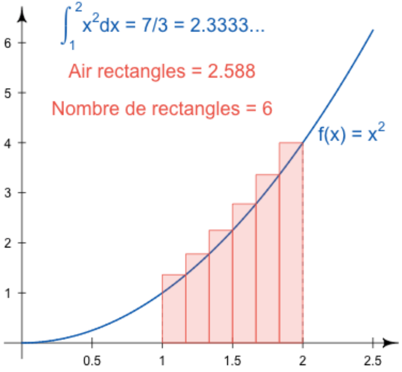
Exemples

La fonction $f(x) = x^2$ est intégrable sur $[1, 2]$ donc les sommes de Riemann converge vers l'intégrale $\int_1^2 x^2 dx$. Ci-dessous, on pose $\omega_k = x_k$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

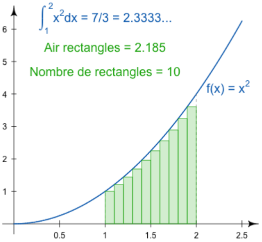
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

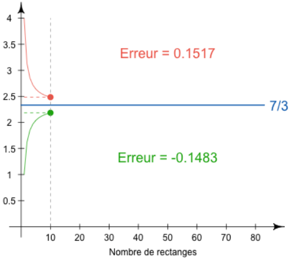


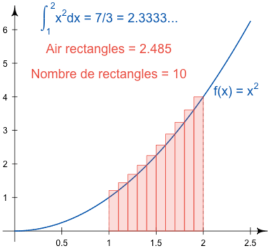


Exemples

La fonction $f(x) = x^2$ est intégrable sur $[1, 2]$ donc les sommes de Riemann converge vers l'intégrale $\int_1^2 x^2 dx$.

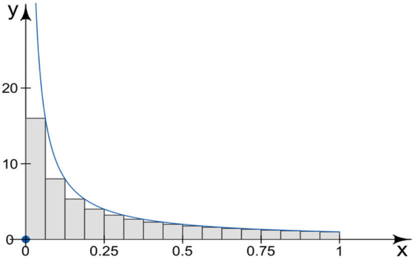


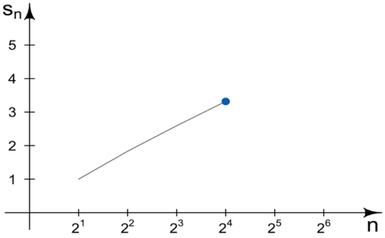




Exemples

La fonction $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$ **n'est pas intégrable** sur $[0, 1]$.





Le calcul suivant le montre

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(\omega_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to \infty}{\to} +\infty.$$

Remarque: Toutefois, la continuité n'est pas nécessaire à l'intégrabilité.

Propriétés

Théorème (Propriétés des intégrales définies).

Soit f, g *intégrables sur* $[a, b]$ *et* $c \in [a, b]$ *alors*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_c^c f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \quad \text{où } \alpha \text{ est un nombre arbitraire}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \text{(règle de Chasles)}$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Malheureusement, ceci ne nous aide que peu pour calculer une intégrale comme

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = ???$$

Théorème fondamentale de l'analyse

Théorème (Théorème fondamental de l'analyse).

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, alors la fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est dérivable et $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in]a, b[$.

Ce théorème fait le lien entre deux notions fondamentales d'analyse, la dérivée et l'intégrale. Mais il surtout, il donne un moyen de pouvoir calculer des intégrales sans faire de limites. En effet, supposons que l'on connaisse une fonction $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et telle que $\forall x \in]a, b[$

$$G'(x) = f(x).$$

Ceci est equivalent à: $\exists c \in \mathbb{R}$, tel que $G(x) = F(x) + c$, $\forall x \in [a, b]$. On a donc

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x)dx - \int_a^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

Remarque: On a remplacé un calcul de limite par... une soustraction!!!

Primitives

La fonction F du théorème fondamental se nomme une intégrale indéfinie de f de part la relation $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. On écrit aussi $F = \int f(t)dt$. Mais du fait que $F'(x) = f(x)$, c'est aussi une primitve de f.

Définition (Primitives).

Une fonction G continue tel que $G' = f$ est une **primitive** *de f. Si F et G sont deux primitives de f alors $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + c$.*

Une partie essentielle du calcul inégral consite donc à trouver une primitive de la fonction à intégrer.

Exemple

On considère $f(x) = x^2$ sur $[0, 1]$ et avait $\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 =???$.
Or, il est facile de voir que $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ est une primitive de f (sur $\mathbb{R}$). Ainsi,

$$\int_0^1 x^2 dx \overset{\text{not.}}{=} F(x)\Big|_0^1 = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

Primitives de fonctions usuelles

Primitives de fonctions usuelles

(1) $f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$

(2) $f(x) = x^{-n} \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\dfrac{x^{-(n-1)}}{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$

(3) $f(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \ln(x),$

(4) $f(x) = e^{\alpha x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^*,$

En général, il est malheureusement difficile de déterminer une primitive d'une fonction f donnée. Par exemple, pour $f(x) = xe^x$, $f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x}$ ou $f(x) = e^{-x^2}$ quelle est $F(x)$?

Pour les deux premières fonctions, il existe des techniques permettant calculer les intégrales. Pour la dernière par contre, il faut utiliser des méthodes numériques...