

# Mathématiques I

Application des dérivées partielles

Approximation linéaire de fonctions de deux variables

Dr. Mucyo Karemera (enseignant), Prof. Stéphane Guerrier

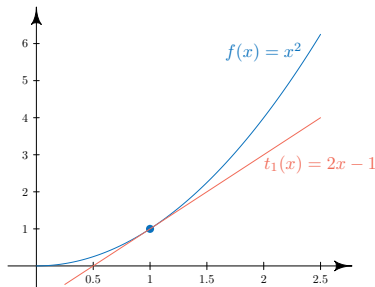
Matériel disponible en ligne: <https://mkaremera-math1.netlify.app/>

Licence: CC BY-NC-SA 4.0



# Approximation linéaire de $f(x, y)$

Nous avons vu comment approximer les fonctions d'une variable dérivables au voisinage d'un point.



Soit  $f : A \rightarrow B$  une fonction, où  $A, B \subset \mathbb{R}$ , dérivable en  $x_0 \in A$ , alors, on a

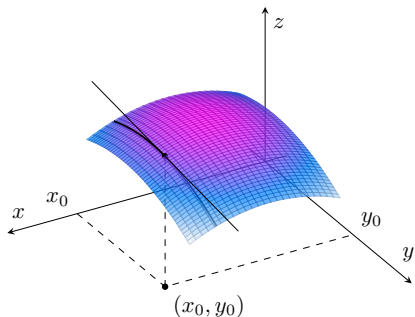
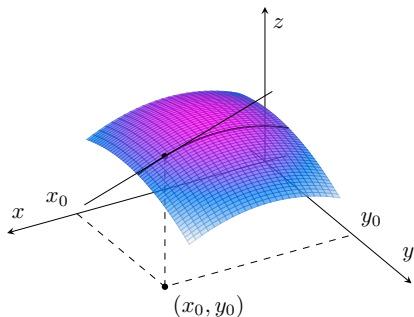
$$f(x) \approx t_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{pour } x \text{ proche de } x_0.$$

ou encore

$$f(x_0 + h) \approx t_{x_0}(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h, \quad \text{pour } h \text{ petit.}$$

# Approximation linéaire de $f(x, y)$

Le même raisonnement peut être fait pour une fonction de deux variables  $f(x, y)$  dérivable en  $(x_0, y_0)$ , en utilisant les dérivées partielles.



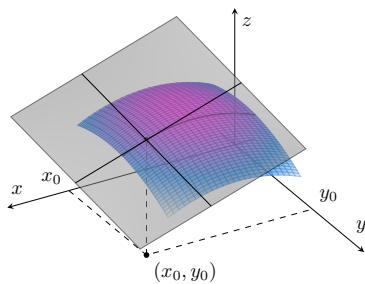
Autrement dit, pour de petites valeurs (accroissements)  $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ , on a

$$f(x_0 + h_1, y_0) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 = t_{x_0}(x_0 + h_1)$$

$$f(x_0, y_0 + h_2) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 = t_{y_0}(y_0 + h_2)$$

# Approximation linéaire de $f(x, y)$ : l'intuition

Une droite tangente à la courbe d'une fonction d'une variable devrait correspondre à **un plan tangent** à la surface d'une fonction de deux variables.



Géométriquement, il semble que ce plan soit "issu" des tangentes  $t_{x_0}$  et  $t_{y_0}$ . On peut aussi remarquer, en supposant que les dérivées partielles sont continues ( $f(x, y)$  est donc dérivable), que, pour  $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$  petits,

$$\begin{aligned} f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) &\approx f(x_0, y_0 + h_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0 + h_2)h_1 \\ &\approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1. \end{aligned}$$

# Approximation linéaire de $f(x, y)$

De cette intuition, on tire la définition suivante.

## Définition (Approximation linéaire).

Soit  $f(x, y)$  une fonction *continuellement dérivable*<sup>a</sup> en  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , alors la fonction  $t_{(x_0, y_0)}(x, y)$  définie par

$$t_{(x_0, y_0)}(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

est **l'approximation linéaire de  $f(x, y)$  au voisinage de  $(x_0, y_0)$** . En particulier, si  $x \approx x_0$  et  $y \approx y_0$  alors

$$f(x, y) \approx t_{(x_0, y_0)}(x, y).$$

---

<sup>a</sup>i.e, dont les dérivées partielles existent et sont continues.

## Approximation linéaire de $f(x, y)$ : exemple

Donner une approximation de  $f(-0.98, 2.98)$ , où  $f(x, y) = 3x^2 + xy - y^2$ .

On calcule d'abord les dérivées partielles en  $x$  et en  $y$  de  $f(x, y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - 2y.$$

Comme  $(-0.98, 2.98)$  est "proche" de  $(-1, 3)$ , on les évalue ensuite au point  $(x_0, y_0) = (-1, 3)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 3) = 6 \cdot (-1) + 3 = -3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-1, 3) = -1 - 2 \cdot 3 = -7,$$

et on calcule aussi  $f(-1, 3) = -9$  de sorte que l'on obtient

$$\begin{aligned} t_{(-1,3)}(-0.98, 2.98) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= -9 + (-3) \cdot \underbrace{(-0.98 - (-1))}_{0.02} + (-7) \cdot \underbrace{(2.98 - 3)}_{-0.02} = -8.92. \end{aligned}$$

Ainsi,  $f(-0.98, 2.98) \approx -8.92$ . La valeur exacte de  $f(-0.98, 2.98)$  à deux décimales près est  $-9.05$ .

# Approximation linéaire de $f(x, y)$ : le plan tangent

L'équation  $z = t_{(x_0, y_0)}(x, y)$  est celle d'un plan dans  $\mathbb{R}^3$ . En effet, on a

$$\begin{aligned}t_{(x_0, y_0)}(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}_a x + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}_b y + \underbrace{f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x_0 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y_0}_c \\ &= ax + by + c.\end{aligned}$$

L'équation  $z = t_{(x_0, y_0)}(x, y)$  correspond en fait à celle du **plan tangent à la surface** de  $f(x_0, y_0)$  au point  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ . Dans l'exemple précédent, on obtient

$$t_{(-1, 3)}(x, y) = -3x - 7y + 11.$$

Similairement au cas en une variable, on a

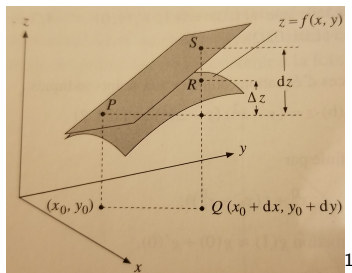
- 1)  $t_{(x_0, y_0)}(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$ ,
- 2)  $\frac{\partial t_{(x_0, y_0)}}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  et  $\frac{\partial t_{(x_0, y_0)}}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

# Accroissement et différentielle

Partant de  $t_{(x_0, y_0)}(x, y)$ , on définit **la différentielle**

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \underbrace{(x - x_0)}_{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \underbrace{(y - y_0)}_{dy},$$

qui permet d'estimer l'accroissement  $\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ . L'idée est la même que pour les fonctions d'une variable comme illustrer ci-dessous.



Si  $dx$  et  $dy$  sont petits, alors  $\Delta z \approx dz$ .

<sup>1</sup>image tiré du livre "Sydsaeter, et al. Mathématiques pour l'économie."



## Accroissements et différentielle: exemple

On considère  $f(x, y) = xy$ . Quelle est sa différentielle au point  $(x_0, y_0) = (2, 3)$ ?

On calcul

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x,$$

de sorte que l'on a

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial f}{\partial x}(2, 3)(x - 2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3)(y - 3) \\ &= 3(x - 2) + 2(y - 3) = 3x + 2y - 12. \end{aligned}$$

Ainsi, la différentielle de  $f(x, y) = xy$  en  $(2, 3)$  est

$$dz = 3x + 2y - 12.$$