# Mathématiques I

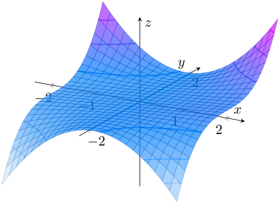
## Optimisation sous contrainte
## Méthode de substitution

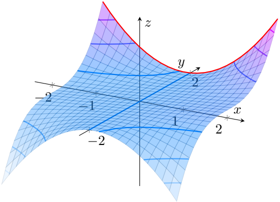
Dr. Mucyo Karemera (enseignant), Prof. Stéphane Guerrier

Matériel disponible en ligne: `https://mkaremera-math1.netlify.app/`

# Optimisation: domaine de départ à bord

Certaines fonctions ne présentent aucun point critique sur leur domaine de définition. C'est par exemple le cas de $f(x, y) = 2x + x^2y^3$ sur $\mathbb{R}^2$ (vérifiez-le:).




Toutefois, on peut observer que si l'on considère un domaine de départ plus restreint, des extrema peuvent "apparaître". C'est en fait ce que l'on voit sur les représentations graphiques qui sont toujours des représentations partielles.

Plus généralement, lorsque le domaine de départ possède un bord (comme $\bar{\mathcal{D}}_r$), la recherche des extrema se fait en deux étapes

1) on rehcerche les points critiques à l'intérieur du domaine,
2) on recherche les points critiques sur le bord,
3) on compare les valeurs prisent par la fonctions en ces points.

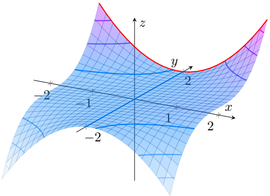
# Optimisation sous contrainte

Dans le cours précédant, nous avons traité le cas 1). Ici, nous allons donné des outils pour traiter le cas 2).

Il est courant que le bord (ou une partie du bord) d'un ensemble corresponde algébriquement à une équation $g(x, y) = c$, où $g$ est deux fois continument dérivable et $c \in \mathbb{R}$. Par exemple, le bord de $\bar{\mathcal{D}}_r$ correspond à $x^2 + y^2 = r^2$.

Dès lors, le problème que nous souhaitons résoudre est le suivant

Trouver les extrema de $f(x, y)$ **sous la contrainte** $g(x, y) = c$.

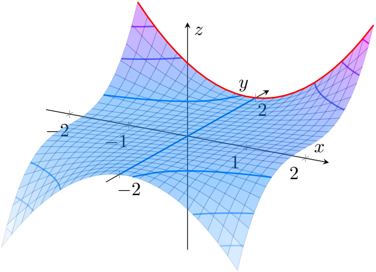



Géometriquement, cela revient à trouver les extrema d'une courbe sur la surface du graphe de $f$.

Dans la suite, on supposera les fonctions $f$ et $g$ deux fois continument dérivables.

# Exemple 1

Reprenons l'exemple de la fonction $f(x,y) = 2x + x^2y^3$ et considérons la contrainte $g(x,y) = y = 2$



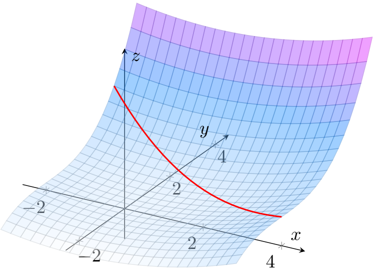

Il nous faut donc résoudre le système suivant

$$\begin{cases} \text{extr } f(x,y) \\ g(x,y) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{extr } 2x + x^2y^3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{extr } 2x + 8x^2 \\ y = 2 \end{cases}$$

où "extr $f(x,y)$" indique que nous cherchons les extrema. Reste alors à déterminer les extrema de $h(x) = 2x + 8x^2$. Les techniques d'optimisation de fonctions d'une variable donnent le point critique $(x_0, y_0) = (-1/8, 2)$ qui est un minium global sous contrainte.

# Exemple 2

Déterminons les extrema de $f(x, y) = x^2 + y^3$ sous la contrainte $g(x, y) = x + 2y = 4$.



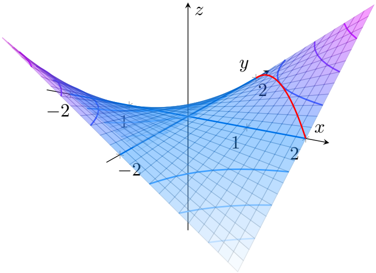

Il nous faut donc résoudre le système suivant

$$\left\{\begin{array}{l} \text{extr } x^2 + y^3 \\ x + 2y = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{extr } (4-2y)^2 + y^3 \\ x = 4 - 2y \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{extr } 16 - 16y + 4y^2 + y^3 \\ x = 4 - 2y \end{array}\right.$$

Reste alors à déterminer les extrema de $h(y) = 16 - 16y + 4y^2 + y^3$. Les techniques d'optimisation de fonctions d'une variable donnent les points critiques $(12, -4)$ et $(4/3, 4/3)$ qui sont respectivement un maximum et un minimum local.

# Exemple 3

Déterminons les extrema de $f(x, y) = xy$ sous la contrainte $g(x, y) = x + y = 2$.




Il nous faut donc résoudre le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{extr } xy \\ x + y = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{extr } x(2-x) \\ y = 2 - x \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{extr } 2x - x^2 \\ y = 2 - x \end{array} \right.$$

Reste alors à déterminer les extrema de $h(x) = 2x - x^2$. Les techniques d'optimisation de fonctions d'une variable donnent le point critique $(1, 1)$ qui est un maximum global.

# Méthode de substitution

Dans les exemples précédant, nous avons fait une **substitution** pour pouvoir résoudre le système. Plus précisément, nous avons utilisez l'expression $g(x,y) = c$ pour la transformer en une expression de la forme $y = \varphi(x)$ ou $x = \psi(y)$. Ceci nous a permis de réduire le problème à l'optimisation d'une fonction d'une variable, en l'occurrence $f(x, \varphi(x))$ ou $f(\psi(y), y)$.

Le théorème suivant indique quand ce type d'opération est possible

**Théorème (des fonctions implicites).**

*Soit* $g : A \to \mathbb{R}$, *où* $A \subset \mathbb{R}^2$, *une fonction continûment dérivable dans un voisinage de* $(x_0, y_0) \in A$. *Supposons que* $g(x_0, y_0) = c$ **et que** $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. *Alors il existe une fonction continûment dérivable* $y = \varphi(x)$, *définie sur un voisinage* $V_\delta$ *de* $x_0$ *telle que:*

$$g(x, \varphi(x)) = c, \quad \forall x \in V_\delta$$
$$\varphi(x_0) = y_0 \quad \textit{et} \quad \varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x))}.$$

Si $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ la conclusion du théorème est similaire avec une fonction

$$x = \psi(y).$$

# Dernier exemple

Malheureusement, même quand le théorème des fonctions implicites s'applique, il ne fournit pas un moyen de déterminer la fonction $\varphi$ (ou $\psi$). Il faut donc voir au cas par cas. Toutefois, il n'est pas toujours nécessaire d'avoir une expression de la forme $y = \varphi(x)$ (ou $x = \psi(y)$) pour pouvoir faire une substitution. L'exemple suivant le montre:

Déterminons les extrema de $f(x, y) = x^2 + y^2 + y - 1$ sous la contrainte $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$.

Il nous faut donc résoudre le système suivant

$$\begin{cases} \text{extr } x^2 + y^2 + y - 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{extr } 1 + y - 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{extr } y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

On en déduit directement que $(0, -1)$ est le minimum global et $(0, 1)$ est le maximum global.

La méthode de substitution est assez limitée. Nous allons considérer une autre méthode plus puissante: **la méthode de Lagrange**.