Université de Genève | | GSEM
Mathématiques I | | Automne 2020
Mucyo Karemera | | **Série 1**

Solution 1:

1. L'ensemble des nombres entiers plus petit ou égal à 2 peut s'écrire

   ☒ $\{x \in \mathbb{Z} | x \leq 2\}$
   ☐ $\{y \in \mathbb{Z} | x \leq 2\}$
   ☒ $\{y \in \mathbb{Z} | y \leq 2\}$
   ☐ $\{x \leq 2\}$

2. On sait que $\mathbb{Q} = \left\{ x = \frac{p}{q} \middle| p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z},\ \text{tel que } q \neq 0 \right\}$. A-t-on aussi:

   ☒ $\mathbb{Q} = \left\{ y = \frac{a}{b} \middle| a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ \text{tel que } b \neq 0 \right\}$

   ☒ $\mathbb{Q} = \left\{ x = \frac{p}{q} \middle| p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ \text{tel que } q \neq 0 \right\}$

   ☒ $\mathbb{Q} = \left\{ x = \frac{p}{q} \middle| p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^* \right\}$

   ☐ $\mathbb{Q} = \left\{ x = \frac{p}{q} \middle| p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{R},\ \text{tel que } q \neq 0 \right\}$

3. Comment peut-on traduire que : $\pi \notin \mathbb{Q}$

   ☒ $\forall x, y \in \mathbb{Z},\ \pi \neq \frac{x}{y}$,
   ☒ $\forall x, y \in \mathbb{Z},\ \pi \neq \frac{y}{x}$,
   ☐ $\forall x, y \in \mathbb{Z},\ y\pi \neq x$

4. Quelle(s) phrase(s) transcrivent (i.e. traduisent littéralement) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy = yx$$

   ☐ Pour tout x et pour tout y, le produit xy égal le produit yx,
   ☐ il existe x appartenant à $\mathbb{R}$ et pour tout y appartenant à $\mathbb{R}$, le produit xy égal le produit yx,
   ☐ Pour tout y appartenant à $\mathbb{R}$ et pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, le produit xy égal le produit yx, appartenant à $\mathbb{R}$
   ☒ Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ et pour tout y appartenant à $\mathbb{R}$, le produit xy égal le produit yx,

5. Quelle(s) phrase(s) transcrivent (i.e. traduisent littéralement) :

$$\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 0.246 = \frac{x}{y}.$$

   ☐ Il existe deux entiers naturel x et y tel que 0.246 égale $\frac{x}{y}$.

☒ Il existe un entier naturel x et un entier relatif y tel que 0.246 égale $\frac{x}{y}$
☐ Il existe un entier relatif x et un entier relatif y tel que 0.246 égale $\frac{x}{y}$
☐ Il n'existe qu'un seul entier naturel x et un seul entier relatif y tel que 0.246 égale $\frac{x}{y}$.

6. ☐ $\{1\}$ est un nombre,
   ☒ $\{1\}$ est un ensemble,
   ☐ $\{1\}$ est un nombre et ensemble,
   ☐ $\{1\}$ n'est rien de tout ça.

7. Supposons que $x = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}^*$. Peut-on conclure que $x \in \mathbb{Q}$?

   ☒ Vrai
   ☐ Faux

8. Supposons que $x = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. Peut-on conclure que $x \notin \mathbb{Q}$?

   ☐ Vrai
   ☒ Faux

9. Supposons que $x \in \mathbb{Q}$. Peut-on conclure que $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$?

   ☐ Vrai
   ☒ Faux

10. Supposons que $x \in \mathbb{Q}$. Peut-on conclure que $x^2 \in \mathbb{R}$?

    ☒ Vrai
    ☐ Faux

11. $\mathbb{R} = \left\{ x = \dfrac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{R},\ \text{tel que } q \neq 0 \right\}$?

    ☒ Vrai
    ☐ Faux

12. $0 = \left\{ x = \dfrac{p}{q} \,\middle|\, p = 0,\ q \in \mathbb{R},\ \text{tel que } q \neq 0 \right\}$?

    ☐ Vrai
    ☒ Faux

13. $\{0\} = \left\{ x = \dfrac{p}{q} \,\middle|\, p = 0,\ q \in \mathbb{R},\ \text{tel que } q \neq 0 \right\}$?

    ☒ Vrai
    ☐ Faux

14. Supposons que $r = 2y + 1$ avec $y \in \mathbb{N}$. Peut-on conclure que r est un entier impair?

    ☒ Vrai

☐ Faux

15. Supposons que $r = 2y + 1$ avec $x \in \mathbb{N}$. Peut-on conclure que y est un entier?

    ☐ Vrai

    ☒ Faux

16. Supposons que $r^2 = 2y^2$ avec $r \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$. Peut-on conclure que r est un entier pair?

    ☒ Vrai

    ☐ Faux

17. Supposons que $r^2 = 2y^2$ avec $r \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$. Peut-on conclure que y est un entier pair?

    ☒ Vrai

    ☐ Faux

Solution 2:
On considère l'expression $1 - S$ et on remarque que

$$\begin{aligned} 1 - S &= 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...) \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\ &= S. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$1 - S = S \Rightarrow 1 = 2S \Rightarrow S = \frac{1}{2}.$$

Solution 3:
Démonstration par l'absurde
Supposez que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Cela signifie qu'il peut être écrit comme le ratio de deux entiers relatifs p et q:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \tag{1}$$

où nous pouvons assumer que p et q n'ont pas de facteurs communs. (S'il y avait eu un facteur commun, nous aurions simplifié et ré-écrite la fraction sous forme d'une autre fraction d'entiers relatifs).
En développant, nous obtenons:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \tag{2}$$

puis:

$$p^2 = 2 \cdot q^2 \tag{3}$$

p^2 est donc pair. Nous pouvons le décrire par la relation suivante (avec n un entier relatif):

$$p \cdot p = 2 \cdot n \tag{4}$$

Comme p et n sont tous deux des entiers relatifs et que 2 est un nombre premier, cela implique que p est divisible par deux ; p est donc pair. Mais cela implique que p^2 est divisible par 4. Subséquemment, q^2 et q doivent être pairs.
Ainsi, p et q sont pairs. Ils ont un diviseur en commun, ce qui contredit l'hypothèse initiale. Si $\sqrt{2}$ était un entier rationnel, nous pourrions trouver un diviseur commun pour n'importe quelle fraction irréductible.
Ce qui est absurde.