Exercise 1:

1. Combien de solution(s) le système linéaire suivant possède-t-il?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -5/4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 71/3 \\ x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -91/12 \end{cases}$$

☐ 0

☒ 1

☐ 2

☐ une infinité

☐ Aucune des réponses ci-dessus

2. Que vaut le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

☒ -66

☐ -210

☐ 222

☐ -72

☐ Aucune des réponses ci-dessus

3. Quelle est l'inverse (pour autant qu'il existe) de

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -7 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

☐ $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 23/15 & -7/15 & -1/3 \\ -5/3 & 1/3 & 2/3 \\ 14/15 & 1/15 & 1/3 \end{pmatrix}$

☒ $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 23/15 & 7/15 & -1/3 \\ -5/3 & -1/3 & 2/3 \\ 14/15 & 1/15 & -1/3 \end{pmatrix}$

☐ $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 23/15 & 7/15 & 2/3 \\ -5/3 & -1/3 & 2/3 \\ 14/15 & 1/15 & -1/3 \end{pmatrix}$

☐ $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 23/15 & 7/15 & -1/3 \\ -5/3 & -1/3 & 2/3 \\ 14/15 & 4/15 & -1/3 \end{pmatrix}$

☐ Aucune des réponses ci-dessus

4. Que vaut le produit suivant
$$\begin{pmatrix} 1/4 & 2 & 3 \\ 1 & -2/3 & -7 \\ 3 & 5 & 6/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

   ☐ $\begin{pmatrix} -15/4 \\ 91/6 \\ -4 \end{pmatrix}$

   ☒ $\begin{pmatrix} 15/4 \\ -91/6 \\ -4 \end{pmatrix}$

   ☐ $\begin{pmatrix} 15/4 \\ 91/6 \\ -4 \end{pmatrix}$

   ☐ $\begin{pmatrix} 15/4 \\ -91/6 \\ 4 \end{pmatrix}$

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

5. Parmi les familles de vecteurs suivantes, lesquelles sont linéairement indépendantes

   ☒ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

   ☐ $\begin{pmatrix} -6 \\ 18 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}$

   ☒ $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

   ☐ $\begin{pmatrix} \lambda \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2\lambda \\ 6 \end{pmatrix}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

6. Parmi les familles de vecteurs suivantes, lesquelles sont linéairement indépendantes

   ☐ $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -11 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$

   ☒ $\begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   ☒ $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

   ☐ $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ -18 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

☐ Aucune des réponses ci-dessus

Exercise 2:
Soit le système:

$$20x + 4y = \beta$$
$$5x + \alpha y = 1$$

où x, y sont des inconnues et α, β des paramètres réels.

1. Pour quelles valeurs de α ce système a-t-il une solution unique? Calculer cette solution. La matrice $\mathbf{A}$ étant carrée, le système d'équations admet une solution unique à condition qu'elle soit non-singulière. Le calcul du déterminant nous donne $\det\mathbf{A} = 20\alpha - 20 = 20(\alpha - 1)$ qui s'annule quand $\alpha = 1$. Donce, le système admet une unique solution quand $\alpha \neq 1$.
   Dans ce cas, la solution unique est donnée par:
   $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{20(\alpha-1)} \begin{bmatrix} \alpha & -4 \\ -5 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{20(\alpha-1)} \begin{bmatrix} \alpha\beta - 4 \\ -5\beta + 20 \end{bmatrix}$$

2. Pour quelles valeurs de α et β ce système n'admet-il aucune solution? Considérons l'étude de la matrice *augmentée* $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$. Nous allons nous intéresser aux cas où son rang est plus grand que celui de la matrice $\mathbf{A}$.
   $$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 20 & 4 & \beta \\ 5 & \alpha & 1 \end{array}\right]$$
   De par les dimensions de la matrice, nous savons que rang $\mathbf{A} \leq \min(m, n) = n = 2$, par conséquent, la seule possibilité dont nous disposons pour avoir incompatibilité de solutions, c'est d'avoir:
   $$\text{rang}\mathbf{A} = 1 < 2 = \text{rang}\,[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$$
   c'est-à-dire, que la matrice $\mathbf{A}$ soit singulière et qu'il y ait au moins une sous-matrice d'ordre 2 de la matrice augmentée qui soit non singulière. Nosu avons vu que quand $\alpha = 1$, la matrice $\mathbf{A}$ est singulière et de rang 1. Ainsi, nous travaillons sur la matrice augmentée:
   $$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 20 & 4 & \beta \\ 5 & 1 & 1 \end{array}\right]$$
   La sous-matrice formée par $\mathbf{A}$ étant singulière, nous considérons la sous-matrice d'ordre 2 composée des deux dernières colonnes. En effet, pour avoir rang $[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 2$, il faut:
   $$\det \left[\begin{array}{c|c} 4 & \beta \\ 1 & 1 \end{array}\right] = 4 - \beta \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq 4.$$
   Donc, pour avoir incompatibilité des équations, il faut que $\alpha = 1$ et $\beta \neq 4$.

Exercise 3:
Soit le système d'équations linéaires:

$$\alpha x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$(\beta - 1)x_2 + \alpha x_3 = \alpha$$
$$\alpha x_1 + 2\beta x_2 + \beta x_3 = 1$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont des paramètres.

1. Écrire le système sous forme matricielle **Ax=b**.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & (\beta-1) & \alpha \\ \alpha & 2\beta & \beta \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Calculer le déterminant de **A**. Montrer que det**A** $= 0$ si et seulement si $\alpha = 0$, ou $\beta = 1$, ou $\beta = 2\alpha + 1$.

$$\begin{aligned} \det\mathbf{A} &= \alpha\beta(\beta-1) + 2\alpha^2 + 0 - \alpha(\beta-1) - 2\beta\alpha^2 - 0 \\ &= \alpha\beta(\beta-1) - \alpha(\beta-1) - 2\alpha^2(\beta-1) \\ &= \alpha(\beta-1)\left[\beta - 1 - 2\alpha\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Cela implique $\alpha = 0$ ou $\beta = 1$ ou $\beta - 1 - 2\alpha = 0$, soit encore $\alpha = 0$ ou $\beta = 1$ ou $\beta = 2\alpha + 1$.

3. Résoudre le système lorsque $\alpha = 0$ et $\beta = 1$.
Si $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, alors:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

rang **A** $= 1$ (les 2 lignes non nulles sont égales)
rang $[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 1$ (**b** est égale à la $3^{\text{ème}}$ colonne de **A**). D'où le système est compatible.
Ax=b devient alors:

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0x_1 &= 0 \end{aligned}$$

La première équation donne la relation $x_3 = 1 - 2x_2$. De plus, x_1 peut prendre n'importe quelle valeur. Posons: $x_1 = c_1$ et $x_2 = c_2$. La solution générale s'écrit:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 1 - 2c_2 \end{bmatrix}$$

4. Montrer que le système n'a pas de solution lorsque $\alpha = 0$ et $\beta \neq 1$.
Si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 1$, alors:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & \beta - 1 & 0 \\ 0 & 2\beta & \beta \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \beta - 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 - (\beta - 1) = 1 - \beta \neq 0, \text{ pour } \beta \neq 1$$

Cela implique rang **A** $= 2$

$$det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \beta - 1 & 0 & 0 \\ 2\beta & \beta & 1 \end{bmatrix} = -(\beta-1)(1-\beta) = (1-\beta)^2 \neq 0, \text{ pour } \beta \neq 1$$

D'où rang $[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 3 >$ rang **A** $= 2$. Donc le système est incompatible.

5. Résoudre le système lorsque $\alpha \neq 0$ et $\beta = 1$.
   Si $\alpha \neq 0$ et $\beta = 1$, alors:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & 2 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = 2\alpha \neq 0, \text{ pour } \alpha \neq 0$$

   Cela implique rang $\mathbf{A} = 2$, et rang $[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 2$ car $\mathbf{b}$ est égal à la troisième colonne de $\mathbf{A}$. Donc le système est compatible.

$$\alpha x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$\alpha x_3 = \alpha \Rightarrow x_3 = 1$$

   La première équation devient : $\alpha x_1 + 2x_2 + 1 = 1 \Rightarrow \alpha x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{\alpha}{2}x_1$
   Posons $x_1 = c$. La solution générale s'écrit alors:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ -\frac{\alpha}{2}c \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. Montrer que le système n'a pas de solution lorsque $\alpha \neq 0$ et $\beta = 2\alpha + 1$.
   Si $\alpha \neq 0$ et $\beta = 2\alpha + 1$, alors:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & 2\alpha & \alpha \\ \alpha & 2(2\alpha+1) & 2\alpha+1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 0 & 2\alpha \end{bmatrix} = 2\alpha^2 \neq 0, \text{ pour } \alpha \neq 0 \Rightarrow \text{rang } \mathbf{A} = 2$$

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 2\alpha+1 & 1 \end{bmatrix} &= \alpha^2 + \alpha^2 + 0 - \alpha^2 - \alpha^2(2\alpha+1) - 0 \\ &= \alpha^2(1 - 2\alpha - 1) = -2\alpha^3 \neq 0, \text{ pour } \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

   De ce fait, rang $[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 3 >$ rang$\mathbf{A}$$= 2$, ce qui implique que le système est incompatible.