Exercise 1:

1. La *suite Fibonacci* est définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ $\forall n \geq 2$. Que valent les 4 premiers termes de la suite u_n?

   ☐ 1,2,3,4

   ☐ 1,2,3,5

   ☐ 1,1,2,3

   ☐ 1,1,2,4

2. Que valent les 4 premiers termes de la suite $u_n = \frac{2}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$?

   ☐ $\infty, 2, 1, \frac{2}{3}$

   ☐ $(\frac{1}{2})^{-1}, 1^{-1}, (\frac{3}{2})^{-1}, 2^{-1}$

   ☐ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

   ☐ $2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$

3. Que vaut le 6ième terme de la suite $u_n = 1 + (0.1)^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$?

   ☐ 1.0000001

   ☐ 1.000001

   ☐ $1 + 10^{-6}$

4. Que valent les termes u_5, u_{10} et u_{15} de la suite $u_n = \sqrt{5}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$?

   ☐ $\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{15}$

   ☐ $\sqrt{5}, \sqrt{5}, \sqrt{5}$

   ☐ $5, 5, 5$

5. Quelle est l'expression du $(k+1)$-ième terme de la suite $u_n = \dfrac{n^2 + 3n - 2}{2n - 1}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$?

   ☐ $\dfrac{k^2 + 3k - 2}{2k - 1}$

   ☐ $\dfrac{k^2 + 3k - 1}{2k + 1}$

   ☐ $\dfrac{(k+1)^2 + 3(k+1) - 2}{2(k+1) - 1}$

   ☐ $\dfrac{k^2 + 5k + 2}{2n + 1}$

   ☐ $\dfrac{k^2 + 5k + 2}{2k + 1}$

6. Que peut-on dire de $\lim\limits_{n \to \infty} (-1)^{2n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$?

   ☐ La suite converge.

   ☐ La suite diverge.

- ☐ $\lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} = 1$.
- ☐ $\lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} = -1$.
- ☐ La limite de $u_n = (-1)^{2n}$ n'existe pas
- ☐ $\lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} = -1$ et $\lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} = 1$ simultanément.

7. Que peut-on dire de $\lim_{n\to\infty} 6\left(-\frac{5}{6}\right)^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$?

- ☐ La suite converge.
- ☐ La suite diverge.
- ☐ $\lim_{n\to\infty} 6\left(-\frac{5}{6}\right)^n = 0$.
- ☐ $\lim_{n\to\infty} 6\left(-\frac{5}{6}\right)^n = 1$.
- ☐ La limite de $u_n = 6\left(-\frac{5}{6}\right)^n$ n'existe pas

8. Que peut-on dire de $\lim_{n\to\infty} \left[6\left(-\frac{5}{6}\right)\right]^n$?

- ☐ La suite converge.
- ☐ La suite diverge.
- ☐ $\lim_{n\to\infty} \left[6\left(-\frac{5}{6}\right)\right]^n = 0$.
- ☐ $\lim_{n\to\infty} \left[6\left(-\frac{5}{6}\right)\right]^n = 1$.
- ☐ La limite de $u_n = \left[6\left(-\frac{5}{6}\right)\right]^n$ n'existe pas

9. $\sum_{l=0}^{2} 2^{2^l} = \cdots$

- ☐ 14
- ☐ 22
- ☐ 7
- ☐ 37

10. $\sum_{k=2}^{3} (5 \cdot 3^{k-2} - k) = \cdots$

- ☐ 15
- ☐ 20
- ☐ 12
- ☐ $(5 \cdot 3^{k-2} - k)$

11. $\sum_{l=2}^{3} (2k^{k-1} + k) = \cdots$

- ☐ 67
- ☐ $2(2k^{k-1}+k)$
- ☐ $2k^{k-1}+k$
- ☐ 27

12. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\cdots$
    - ☐ $\sum_{l=1}^{n} l^3$
    - ☐ $\sum_{k=1}^{n} k^3$
    - ☐ $\sum_{l=1}^{n} n^3$
    - ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$

13. $1+3^2+3^4+3^6+\cdots+3^{12}=\cdots$
    - ☐ $\sum_{l=0}^{6} 3^{2l}$
    - ☐ $\sum_{l=1}^{6} 3^{2l}$
    - ☐ $\sum_{k=0}^{12} 3^{l}$
    - ☐ $\sum_{l=0}^{6} 3^{2k}$
    - ☐ $\sum_{k=0}^{6} 3^{2k}$

14. $2x+4x^2+8x^3+16x^4+32x^5=\cdots$
    - ☐ $\sum_{j=1}^{5} 2^j x^j$
    - ☐ $\sum_{l=1}^{6} 2x^j$
    - ☐ $\sum_{k=1}^{5}(2x)^k$
    - ☐ $\sum_{k=0}^{5}(2x)^j$
    - ☐ $\sum_{l=0}^{6} 2x^j$

15. $\sum_{k=0}^{\infty}(0.5)^k = ...$
    - ☐ $-\infty$
    - ☐ $\frac{1}{2}$
    - ☐ 2
    - ☐ 4
    - ☐ ∞

16. - ☐ $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi}\right)^k=\frac{\pi}{\pi-3}$
    - ☐ $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi}\right)^k=+\infty$
    - ☐ $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi}\right)^k=\frac{\pi}{3}$
    - ☐ $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi}\right)^k=0$

17. On a vu dans cours que $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)}=1$. On peut déduire que (cocher ce qui est vrai):

- ☐ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 2$
- ☐ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 2$
- ☐ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 2$

18. Supposons que $0 < r < s$, avec $r \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$. On considère $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{s}\right)^k$.

- ☐ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{s}\right)^k$ converge.
- ☐ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{s}\right)^k = \frac{s}{s-r}$
- ☐ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{s}\right)^k = -\frac{r}{r-s}$
- ☐ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{s}\right)^k$ diverge
- ☐ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{s}\right)^k = +\infty$

19. Supposons que $0 < r < s$, avec $r \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$. On considère $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^k$.

- ☐ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^k$ converge.
- ☐ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^k = \frac{r}{r-s}$
- ☐ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^k = -\frac{s}{s-r}$
- ☐ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^k$ diverge
- ☐ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^k = +\infty$

20. Pour quel $n \in \mathbb{N}^*$ a-t-on $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \in [100, 101]$? (utilisez Wolfram Alpha ou une calculatrice)

- ☐ $n = 1 \times 10^{43}$
- ☐ $n = 2 \times 10^{43}$
- ☐ $n = 3 \times 10^{43}$
- ☐ $n = 5 \times 10^{43}$

21. L'égalité suivante est-elle justifiée par les théorèmes du cours? Si oui, calculez la limite.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{4^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k}$$

- ☐ Vrai
- ☐ Faux

22. L'égalité suivante est-elle justifiée par les théorèmes du cours? Si oui, calculez la limite.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n}$$

- ☐ Vrai
- ☐ Faux

23. L'égalité suivante est-elle justifiée par les théorèmes du cours? Si oui, calculez la limite.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k n^3} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\right)$$

   ☐ Vrai
   ☐ Faux

24. Sachant que $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ et que $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \cong 2.71$, peut-on, à l'aide des théorèmes du cours, déterminer ce que vaut $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}\right)^n$? Si oui, calculez la limite.

   ☐ Vrai
   ☐ Faux

Exercise 2:
Calculez les limites de points 22 à 25 de l'exercice 1 lorsqu'elles existent.

Exercise 3:
On considère une constante $c \in \mathbb{R}$ et la suite $u_n = c$. Montrez formellement que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = c.$$

Exercise 4:

1. Trouvez un exemple de deux suites (u_n) et (v_n) telles que

$$\lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n = \infty.$$

2. Trouvez un exemple de deux suites (u_n) et (v_n) telles que

$$\lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n = -\infty.$$

3. Trouvez un exemple de deux suites (u_n) et (v_n) telles que

$$\lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n \quad \text{n'est pas defini.}$$