Université de Genève — GSEM
Mathématiques I — Automne 2020
Mucyo Karemera — **Série 2**

1. La *suite Fibonacci* est définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ $\forall n \geq 2$. Que valent les 4 premiers termes de la suite u_n ?

   ☐ 1,2,3,4

   ☐ 1,2,3,5

   ☒ 1,1,2,3

   ☐ 1,1,2,4

2. Que valent les 4 premiers termes de la suite $u_n = \frac{2}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$?

   ☐ $\infty, 2, 1, \frac{2}{3}$

   ☒ $(\frac{1}{2})^{-1}, 1^{-1}, (\frac{3}{2})^{-1}, 2^{-1}$

   ☐ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

   ☒ $2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$

3. Que vaut le 6ième terme de la suite $u_n = 1 + (0.1)^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$?

   ☐ 1.0000001

   ☒ 1.000001

   ☒ $1 + 10^{-6}$

4. Que valent les termes u_5, u_{10} et u_{15} de la suite $u_n = \sqrt{5}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$?

   ☐ $\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{15}$

   ☒ $\sqrt{5}, \sqrt{5}, \sqrt{5}$

   ☐ $5, 5, 5$

5. Quelle est l'expression du $(k+1)$-ième terme de la suite $u_n = \dfrac{n^2 + 3n - 2}{2n - 1}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$?

   ☐ $\dfrac{k^2 + 3k - 2}{2k - 1}$

   ☐ $\dfrac{k^2 + 3k - 1}{2k + 1}$

   ☒ $\dfrac{(k+1)^2 + 3(k+1) - 2}{2(k+1) - 1}$

   ☐ $\dfrac{k^2 + 5k + 2}{2n + 1}$

   ☒ $\dfrac{k^2 + 5k + 2}{2k + 1}$

6. Que peut-on dire de $\lim_{n\to\infty} (-1)^{2n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$?

   ☒ La suite converge.

   ☐ La suite diverge.

   ☒ $\lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} = 1$.

☐ $\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n} = -1$.

☐ La limite de $u_n = (-1)^{2n}$ n'existe pas

☐ $\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n} = -1$ et $\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n} = 1$ simultanément.

7. Que peut-on dire de $\lim_{n\to\infty} 6\left(-\frac{5}{6}\right)^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$?

☒ La suite converge.

☐ La suite diverge.

☒ $\lim_{n\to\infty} 6\left(-\frac{5}{6}\right)^n = 0$.

☐ $\lim_{n\to\infty} 6\left(-\frac{5}{6}\right)^n = 1$.

☐ La limite de $u_n = 6\left(-\frac{5}{6}\right)^n$ n'existe pas

8. Que peut-on dire de $\lim_{n\to\infty}\left[6\left(-\frac{5}{6}\right)\right]^n$?

☐ La suite converge.

☒ La suite diverge.

☐ $\lim_{n\to\infty}\left[6\left(-\frac{5}{6}\right)\right]^n = 0$.

☐ $\lim_{n\to\infty}\left[6\left(-\frac{5}{6}\right)\right]^n = 1$.

☒ La limite de $u_n = \left[6\left(-\frac{5}{6}\right)\right]^n$ n'existe pas

9. $\sum_{l=0}^{2} 2^{2^l} = \cdots$

☐ 14

☒ 22

☐ 7

☐ 37

10. $\sum_{k=2}^{3}(5\cdot 3^{k-2} - k) = \cdots$

☒ 15

☐ 20

☐ 12

☐ $(5\cdot 3^{k-2} - k)$

11. $\sum_{l=2}^{3}(2k^{k-1} + k) = \cdots$

☐ 67

- ☒ $2(2k^{k-1}+k)$
- ☐ $2k^{k-1}+k$
- ☐ 27

12. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\cdots$

- ☒ $\sum_{l=1}^{n} l^3$
- ☒ $\sum_{k=1}^{n} k^3$
- ☐ $\sum_{l=1}^{n} n^3$
- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$

13. $1+3^2+3^4+3^6+\cdots+3^{12}=\cdots$

- ☒ $\sum_{l=0}^{6} 3^{2l}$
- ☐ $\sum_{l=1}^{6} 3^{2l}$
- ☐ $\sum_{k=0}^{12} 3^{l}$
- ☐ $\sum_{l=0}^{6} 3^{2k}$
- ☒ $\sum_{k=0}^{6} 3^{2k}$

14. $2x+4x^2+8x^3+16x^4+32x^5=\cdots$

- ☒ $\sum_{j=1}^{5} 2^j x^j$
- ☐ $\sum_{l=1}^{6} 2x^j$
- ☒ $\sum_{k=1}^{5} (2x)^k$
- ☐ $\sum_{k=0}^{5} (2x)^j$
- ☐ $\sum_{l=0}^{6} 2x^j$

15. $\sum_{k=0}^{\infty} (0.5)^k = ...$

- ☐ $-\infty$
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☒ 2
- ☐ 4
- ☐ ∞

16.
- ☒ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{\pi}\right)^k = \frac{\pi}{\pi-3}$
- ☐ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{\pi}\right)^k = +\infty$
- ☐ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{\pi}\right)^k = \frac{\pi}{3}$
- ☐ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{\pi}\right)^k = 0$

17. On a vu dans cours que $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1$. On peut déduire que (cocher ce qui est vrai):

- ☐ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 2$

- ☐ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 2$
- ☐ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 2$
- ☒ Aucune des réponses ci-dessus.

18. Supposons que $0 < r < s$, avec $r \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$. On considère $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{s}\right)^k$.

- ☒ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{s}\right)^k$ converge.
- ☒ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{s}\right)^k = \frac{s}{s-r}$
- ☐ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{s}\right)^k = -\frac{r}{r-s}$
- ☐ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{s}\right)^k$ diverge
- ☐ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{s}\right)^k = +\infty$

19. Supposons que $0 < r < s$, avec $r \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$. On considère $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^k$.

- ☐ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^k$ converge.
- ☐ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^k = \frac{r}{r-s}$
- ☐ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^k = -\frac{s}{s-r}$
- ☒ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^k$ diverge
- ☒ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^k = +\infty$

20. Pour quel $n \in \mathbb{N}^*$ a-t-on $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \in [100, 101]$? (utilisez Wolfram Alpha ou une calculatrice)

- ☐ $n = 1 \times 10^{43}$
- ☒ $n = 2 \times 10^{43}$
- ☒ $n = 3 \times 10^{43}$
- ☐ $n = 5 \times 10^{43}$

21. L'égalité suivante est-elle justifiée par les théorèmes du cours? Si oui, calculez la limite.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{4^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k}$$

- ☒ Vrai
- ☐ Faux

22. L'égalité suivante est-elle justifiée par les théorèmes du cours? Si oui, calculez la limite.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n}$$

- ☒ Vrai
- ☐ Faux

23. L'égalité suivante est-elle justifiée par les théorèmes du cours? Si oui, calculez la limite.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k n^3} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\right)$$

☐ Vrai

☒ Faux

24. Sachant que $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ et que $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \cong 2.71$, peut-on, à l'aide des théorèmes du cours, déterminer ce que vaut $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}\right)^n$? Si oui, calculez la limite.

☒ Vrai

☐ Faux

Exercise 1:
Calculez les limites des points 21 à 24 du QCM lorsqu'elles existent.

Solution 1:

Limite du point 21

On a,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{4})^k = \frac{\frac{1}{4}}{1 - (\frac{1}{4})} = \frac{1}{3}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{4^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{3} = \frac{\pi^2 + 2}{6}$$

Limite du point 22

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0 \cdot 0 = 0$$

Limite du point 24

Commençons par reformuler la limite (en utilisant l'indication donnée):

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^3+3n^2+3n+1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{(n+1)^3}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^3\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-3}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-3}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{-3}
\end{aligned}$$

Notons que la limite $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ existe et vaut $e\neq 0$. Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{-3} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{-3} = e^{-3}.$$

Exercise 2:

On considère une constante $c\in\mathbb{R}$ et la suite (u_n) avec $u_n = c$ pour tout n. Montrez formellement que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = c.$$

Solution 2:

On appelle c la limite de la suite (u_n) si la condition suivante est satisfaite: pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier naturel N de telle sorte que pour tout $n \geq N$, on a $|u_n - c| < \epsilon$.

Prenons donc un $\epsilon > 0$, et $N = 1$. Pour tout $n \geq N$, notons que $|u_n - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$. Comme ϵ est quelconque ceci achève la preuve.

Exercise 3:

1. Trouvez un exemple de deux suites (u_n) et (v_n) telles que

$$\lim_{n\to\infty}(u_n+v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n = \infty.$$

2. Trouvez un exemple de deux suites (u_n) et (v_n) telles que

$$\lim_{n\to\infty}(u_n+v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n = -\infty.$$

3. Trouvez un exemple de deux suites (u_n) et (v_n) telles que

$$\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n \quad \text{n'est pas defini.}$$

Solution 3:
Beaucoup de solutions sont possibles: ce qui suit n'est donné qu'à titre d'exemple.

1. $u_n = n$ et $v_n = 0$ pour tout n
2. $u_n = -n$ et $v_n = 0$ pour tout n
3. $u_n = n$ et $v_n = -n$ pour tout n