

Exercice 1:

1. Parmi les variables suivantes, lesquelles peuvent raisonnablement être représentées par des fonctions continues du temps?

- La taille d'un enfant qui grandit.
- La vitesse d'un avion en vol.
- La distance parcourue par une voiture.
- Le nombre d'habitants de Genève.
- Aucune des réponses ci-dessus.

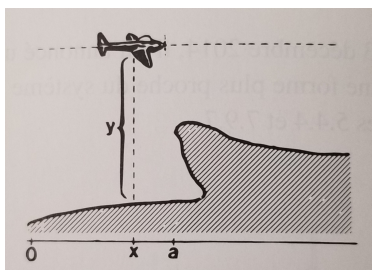
2. Quelle est l'image de 2 par la fonction $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$?

- 3
- 27
- 3
- 37
- Aucune des réponses ci-dessus.

3. On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} x^3 - 5x, & \text{si } x < 4 \\ 11x, & \text{si } x > 4 \end{cases}$. Cocher ce qui est vrai:

- La fonction est bien définie en 4.
- $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 44$
- $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4) = 44$
- La fonction n'est pas définie en 4.
- Aucune des réponses ci-dessus.

4. Un avion survole un relief. On note x la position à la verticale duquel il se trouve et y la distance de l'avion au sol en dessous de lui. La situation est illustrée dans la figure ci-dessous où le relief est représenté par la zone hachurée. Est-ce que y est une fonction continue de x ?



- Oui
- Non

5. La fonction $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 2 \\ x + 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- est continue sur \mathbb{R} ,
- est continue en $x = 3$,
- est continue en $x = 2$,
- est discontinue en $x = 2$.
- Aucune des réponses ci-dessus.

6. La fonction $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2-1} & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{x^2+1} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

- est continue sur $] -1, 1 [$
- est discontinue sur $] -2, 1 [$
- est discontinue sur $[-1, 1]$.
- Aucune des réponses ci-dessus.

7. On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 2 \\ -x^2 + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. Peut-on calculer $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ en utilisant la continuité?

- Oui
- Non

8. On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 2 \\ -x^2 + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. Peut-on calculer $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ en utilisant la continuité?

- Oui
- Non

9. Quelles valeurs faut-il attribuer à $c \in \mathbb{R}$ pour que la fonction suivante soit continue sur \mathbb{R} :

$$f(x) = \begin{cases} c^2x + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 9x^2 + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- 3 ou -3
- $9\sqrt{2}$ ou $-9\sqrt{2}$
- $\sqrt{18}$ ou $-\sqrt{18}$
- $3\sqrt{2}$ ou $-3\sqrt{2}$
- Aucune des réponses ci-dessus.

10. La fonction $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ est-elle dérivable en $x = 1$?

- Oui
- Non

11. Est-il justifié d'utiliser la règle de l'Hospital pour calculer $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 + 2ax + x^2}{x^2 - a^2}$ avec $a \neq 0$?

- Oui
 Non

12. Est-il justifié d'utiliser la règle de l'Hospital pour calculer $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 - 2ax + x^2}{x^2 - a^2}$?

- Oui
 Non

13. On considère les fonctions $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = e^x - x^3$. Déterminer $(g \circ f)'(x)$.

- $2(e^x - x^3)(e^x - 3x^2)$
 $2xe^{x^2+1} - 6x(x^2 + 1)^2$
 $e^{2x} + x^6 - 2x^3e^x + 1$
 $e^{x^2+1} - (x^2 + 1)^3$
 Aucune des réponses ci-dessus.

14. On considère les fonctions $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = e^x - x^3$. Déterminer $(g \cdot f)'(x)$.

- $(x^2 + 1)e^x - x^5 - x^3$
 $2(e^x - x^3)(e^x - 3x^2)$
 $2xe^{x^2+1} - 6x(x^2 + 1)^2$
 $(x + 1)^2e^x - 5x^4 - 3x^2$
 Aucune des réponses ci-dessus.

15. On considère les fonctions $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = e^x - x^3$. Déterminer $(\frac{g}{f})'(x)$.

- $\frac{e^x - 3x^2}{2x}$
 $\frac{-(x-1)^2e^x - 5x^3 + x^5}{(x^2+1)^2}$
 $\frac{(x-1)^2e^x - x^4 - 3x^2}{(x^2+1)^2}$
 $\frac{e^x - x^3}{x^2+1}$
 Aucune des réponses ci-dessus.

Exercice 2:

On voudrait déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = x^x, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Considérer la fonction $g(x) = (\ln \circ f)(x) = \ln(x^x)$ et calculer $g'(x)$ en utilisant la formule de la dérivée des fonction composée.
2. Utiliser la propriété du logarithme sur les puissances pour montrer que $g'(x) = \ln(x) + 1$.
3. Dédire des précédents points $f'(x)$.

Exercice 3:

En utilisant la règle de l'Hôpital, calculer les limites :

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2-1}}{e^{x^2} - e^x}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^2}{x}$