Université de Genève | GSEM
Mathématiques I | Automne 2020
Mucyo Karemera | **Série 4**

Exercise 1

1. Parmi les variables suivantes, lesquelles peuvent raisonnablement être représentées par des fonctions continues du temps?

   ☐ La taille d'un enfant qui grandit.

   ☐ La vitesse d'un avion en vol.

   ☐ La distance parcourue par une voiture.

   ☐ Le nombre d'habitants de Genève.

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

2. Quelle est l'image de 2 par la fonction $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x \leqslant 2 \\ -x^2 + 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$?

   ☐ 3

   ☐ 27

   ☐ -3

   ☐ -37

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

3. On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} x^3 - 5x, & \text{si} \quad x < 4 \\ 11x, & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$. Cocher ce qui est vrai:

   ☐ La fonction est bien définie en 4.

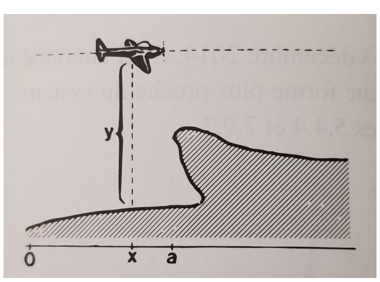
   ☐ $\lim_{x \to 4} f(x) = 44$

   ☐ $\lim_{x \to 4} f(x) = f(4) = 44$

   ☐ La fonction n'est pas définie en 4.

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

4. Un avion survole un relief. On note x la position à la verticale duquel il se trouve et y la distance de l'avion au sol en dessous de lui. La situation est illustrée dans la figure ci-dessous où le relief est représenté par la zone hachurée. Est-ce que y est une fonction continue de x?



   ☐ Oui

   ☐ Non

5. La fonction $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{si} \quad x<2 \\ x+6 & \text{si} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$

   ☐ est continue sur $\mathbb{R}$,

   ☐ est continue en $x=3$,

   ☐ est continue en $x=2$,

   ☐ est discontinue en $x=2$.

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

6. La fonction $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2-1} & \text{si} \quad x<-1 \\ \frac{1}{x^2+1} & \text{si} \quad x \geqslant -1 \end{cases}$

   ☐ est continue sur $]-1,1[$

   ☐ est discontinue sur $]-2,1[$

   ☐ est discontinue sur $[-1,1]$.

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

7. On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si} \quad x<2 \\ -x^2+1 & \text{si} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$. Peut-on calculer $\lim_{x \to 2} f(x)$ en utilisant la continuité?

   ☐ Oui

   ☐ Non

8. On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si} \quad x<2 \\ -x^2+1 & \text{si} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$. Peut-on calculer $\lim_{x \to 4} f(x)$ en utilisant la continuité?

   ☐ Oui

   ☐ Non

9. Quelles valeurs faut-il attribuer à $c \in \mathbb{R}$ pour que la fonction suivante soit continue sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} c^2x+1 & \text{si} \quad x \leqslant 2 \\ 9x^2+1 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

   ☐ 3 ou -3

   ☐ $9\sqrt{2}$ ou $-9\sqrt{2}$

   ☐ $\sqrt{18}$ ou $-\sqrt{18}$

   ☐ $3\sqrt{2}$ ou $-3\sqrt{2}$

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

10. La fonction $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ est-elle dérivable en $x=1$?

   ☐ Oui

   ☐ Non

11. Est-il justifié d'utiliser la règle de l'Hospital pour calculer $\lim_{x \to a} \frac{a^2 + 2ax + x^2}{x^2 - a^2}$ avec $a \neq 0$?
    - ☐ Oui
    - ☐ Non
12. Est-il justifié d'utiliser la règle de l'Hospital pour calculer $\lim_{x \to a} \frac{a^2 - 2ax + x^2}{x^2 - a^2}$?
    - ☐ Oui
    - ☐ Non
13. On considère les fonctions $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = e^x - x^3$. Déterminer $(g \circ f)'(x)$.
    - ☐ $2(e^x - x^3)(e^x - 3x^2)$
    - ☐ $2xe^{x^2+1} - 6x(x^2 + 1)^2$
    - ☐ $e^{2x} + x^6 - 2x^3 e^x + 1$
    - ☐ $e^{x^2+1} - (x^2 + 1)^3$
    - ☐ Aucune des réponses ci-dessus.
14. On considère les fonctions $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = e^x - x^3$. Déterminer $(g \cdot f)'(x)$.
    - ☐ $(x^2 + 1)e^x - x^5 - x^3$
    - ☐ $2(e^x - x^3)(e^x - 3x^2)$
    - ☐ $2xe^{x^2+1} - 6x(x^2 + 1)^2$
    - ☐ $(x + 1)^2 e^x - 5x^4 - 3x^2$
    - ☐ Aucune des réponses ci-dessus.
15. On considère les fonctions $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = e^x - x^3$. Déterminer $(\frac{g}{f})'(x)$.
    - ☐ $\frac{e^x - 3x^2}{2x}$
    - ☐ $\frac{-(x-1)^2 e^x - 5x^3 + x^5}{(x^2+1)^2}$
    - ☐ $\frac{(x-1)^2 e^x - x^4 - 3x^2}{(x^2+1)^2}$
    - ☐ $\frac{e^x - x^3}{x^2+1}$
    - ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

Answer of exercise 1

1. a, b, c
2. a
3. b, d
4. b
5. b, d

6. a, b, c
7. b
8. a
9. d
10. b
11. b
12. a
13. b
14. d
15. c

Exercise 2

On voudrait déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = x^x$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Considérer la fonction $g(x) = (\ln \circ f)(x) = \ln(x^x)$ et calculer $g'(x)$ en utilisant la formule de la dérivée des fonction composée.
2. Utiliser la propriété du logarithme sur les puissances pour montrer que $g'(x) = \ln(x) + 1$.
3. Déduire des précédents points $f'(x)$.

Answer of exercise 2

1. $g' = ((\ln)' \circ f) \times f'$ donc $g'(x) = \frac{1}{f(x)} \times f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$
2. $g(x) = \ln(x^x) = x\ln(x)$ donc $g'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$
3. $g'(x) = \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 = \frac{f'(x)}{f(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{x^x} = \ln(x) + 1 \Leftrightarrow f'(x) = x^x(\ln(x) + 1)$

Exercise 3

En utilisant la règle de l'Hôpital, calculer les limites :

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{x^2-1} - 1}{e^{x^2} - e^x}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)^2}{x}$

Answer of exercise 3

1. Premièrement, vérifions que nous avons une indétermination de type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2-1}-1}{e^{x^2}-e^x} = \frac{0}{0}$$

Nous pouvons donc utiliser la règle de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2-1}-1}{e^{x^2}-e^x} = \lim_{x\to 1} \frac{2xe^{x^2-1}}{2xe^{x^2}-e^x} = \frac{2}{2e-e} = \frac{2}{e}$$

2. Premièrement, vérifions que nous avons une indétermination de type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)^2}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Nous pouvons donc utiliser la règle de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)^2}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to +\infty} 2\frac{\ln(x)}{x}$$

Qui est également une indétermination de type $\frac{\infty}{\infty}$. Nous pouvons donc utiliser à nouveau la règle de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)^2}{x} = \lim_{x\to +\infty} 2\frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} 2\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$