Exercise 1:

1. Laquelle des expressions suivantes correspond à l'équation de la tangente $t_{x_0}(x)$ de la fonction $f(x) = (1+x)^{-1}$ au point $x_0 = 0$?

   ☐ $-x$
   ☐ $1+x$
   ☒ $1-x$
   ☐ $x-1$
   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

2. Laquelle des expressions suivantes correspond à l'équation de la tangente $t_{x_0}(x)$ de la fonction $f(x) = (1+x)^5$ au point $x_0 = -2$?

   ☐ $-2x$
   ☒ $5x+9$
   ☐ $5x-11$
   ☐ $5x-9$
   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

3. On considère la fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$. Quelle valeur approximative de $f(3.1)$ obtient-on en utilisant l'approximation linéaire $t_{x_0}(3.1)$ au point $x_0 = 3$?

   ☐ 2.125
   ☐ 2.0125
   ☒ 2.025
   ☐ 2.25
   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

4. On considère la fonction $f(x) = \sqrt{6x-8}$. Quelle valeur approximative de $f(1.9)$ obtient-on en utilisant l'approximation linéaire $t_{x_0}(1.9)$ au point $x_0 = 2$?

   ☐ 1.975
   ☐ 1.844
   ☐ 1.75
   ☒ 1.85
   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

5. Quel est le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $f(x) = e^{3x}$ au voisinage de $x_0 = 0$?

   ☐ $1+6x+\frac{3x^2}{2}$
   ☒ $1+3x+\frac{9x^2}{2}$
   ☐ $1+3x+9x^2$
   ☒ $1+3x+\frac{9}{2}x^2$
   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

6. Quel est le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $f(x) = e^{x+1}$ au voisinage de $x_0 = -1$?

   ☐ $1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2$
   ☒ $1 + (x+1) + \frac{1}{2}(x+1)^2$
   ☐ $1 + (1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^2$
   ☒ $1 + (x+1) + \dfrac{x^2+2x+1}{2}$
   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

7. En utilisant la différentielle, approximer la variation de la fonction $f(x) = \ln(x)$ lorsque x varie entre 1 et 1.1 (poser $x_0 = 1$).

   ☒ $\dfrac{1}{10}$
   ☐ 0.001
   ☐ $\ln(0.1)$
   ☒ 0.1
   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

8. En utilisant la différentielle, approximer la variation de la fonction $f(x) = x^{20}$ lorsque x varie entre 1 et 1.01 (poser $x_0 = 1$).

   ☐ 0.02
   ☐ 0.002
   ☐ 2
   ☒ 0.2
   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

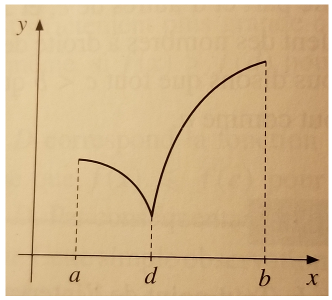
9. On considère la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$ et l'approximation linéaire $t_{x_0}(x)$ en un point x_0. Quelle valeur de x_0 donne la meilleure approximation $t_{x_0}(400)$ de $f(400)$?

   ☒ $x_0 = 7^3$
   ☐ $x_0 = 8^3$
   ☐ $x_0 = 9^3$
   ☐ $x_0 = 10^3$
   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

10. Quel argument garantit que la fonction $f(x) = |x^2 + x - 2|$ définie sur $[-3, 3]$ atteint son minimum?

    ☐ cette fonction possède un point critique dans l'intervalle $[-3, 3]$,
    ☒ cette fonction est contine et définie sur un compact,
    ☐ ça paraît assez clair, non?
    ☒ le théorème des valeurs extrêmes,
    ☐ Aucune des réponses ci-dessus

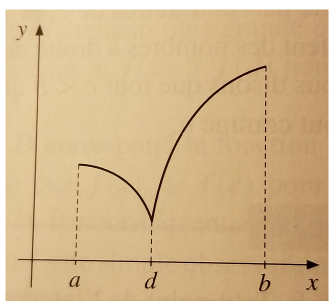
11. Le minimum du graphe suivant est-il un point critique ?



☐ Oui

⊠ Non

12. En supposant que le graphe ci-dessous correspond à une fonction définie uniquement sur l'intervalle $]\,a, b\,[$. Peut-on conclure que cette fonction atteint son maximum?



☐ Oui

⊠ Non

13. On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 1$. Combien de points critiques possède-t-elle ?

☐ 0

☐ 1

☐ 2

☐ 4

⊠ Aucune des réponses ci-dessus

14. Les points critiques de $f(x) = 2x^3 - 24x + 5$ définis sur $]-5, 5\,[$ sont

☐ -2, 0 et 2

☐ 1, 2 et 3

⊠ -2 et 2

☐ -5 et 5

☐ Aucune des réponses ci-dessus

15. Les extrema (globaux et locaux) de $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ définis sur $[-5, 5]$ sont

    ☐ -1, -5 et 5

    ☒ 1, -5 et 5

    ☐ 1, 2 et 3

    ☐ -2, -5 et 5

    ☐ -5 et 5

    ☐ Aucune des réponses ci-dessus

Exercise 2:
Calculer le développement de Taylor à l'ordre 4 au voisinage de $x_0 = 0$

1. $f(x) = 6x^3 + 2x - 4$
   Le développement de Taylor au voisinage de $x_0 = 0$ est aussi appelé développement de Maclaurin.

   $$\begin{array}{llll} f^{'}(x) = 18x^2 + 2 & f^{''}(x) = 36x & f^{'''}(x) = 36 & f^{''''}(x) = 0 \\ f^{'}(0) = 2 & f^{''}(0) = 0 & f^{'''}(0) = 36 & f^{''''}(0) = 0 \end{array}$$

   Nous avons: $f(x) \simeq f(0) + f^{'}(0) \cdot x + f^{''}(0) \cdot \frac{x^2}{2} + f^{'''}(0) \cdot \frac{x^3}{2 \cdot 3} + f^{''''}(0) \cdot \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} = -4 + 2x + 0 + 6x^3 + 0$
   Ce qui revient à la fonction de départ.

2. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

   $$\begin{array}{llll} f^{'}(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2} & f^{''}(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2} & f^{'''}(x) = 36 & f^{''''}(x) = 0 \\ f^{'}(0) = 2 & f^{''}(0) = 0 & f^{'''}(0) = 36 & f^{''''}(0) = 0 \end{array}$$

Exercise 3:
Les fonctions suivantes admettent-elles des extrema locaux ? Si oui, quels sont-ils ? Lesquels sont des extrema globaux ?

1. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. $g(x) = x^2 - 2x - 3$ définie sur l'intervalle $[-2, 3]$.
3. $h(x) = |x^2 - 1|$ définie sur l'intervalle $[-2, 2]$.
4. $k(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 20x + 2$ définie sur $\mathbb{R}_+$.