Exercise 1:

1. On considère une subdivision en $n \in \mathbb{N}^*$ intervalles de $[a, b] \subset \mathbb{R}$,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

On note ω_k le point milieu de chaque intervalle $[x_{k-1}, x_k]$, pour $k \in \{1, \ldots, n\}$. Quelle est l'expression de ω_k?

- ☐ $\omega_k = \dfrac{x_{k-1} - x_k}{2}$
- ☐ $\omega_k = \dfrac{x_{k-1} \cdot x_k}{2}$
- ☒ $\omega_k = \dfrac{x_{k-1} + x_k}{2}$
- ☐ $\omega_k = \dfrac{x_{k-1}/x_k}{2}$
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus

2. On considère une subdivision en $n \in \mathbb{N}^*$ intervalles de $[a, b] \subset \mathbb{R}$,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

En la supposant équidistante, quelle est l'expression de x_k, pour $k \in \{0, \ldots, n\}$?

- ☐ $x_k = \dfrac{b-a}{n} \cdot k$
- ☐ $x_k = \dfrac{b-a}{k} \cdot k + a$
- ☒ $x_k = \dfrac{b-a}{n} \cdot k + x_0$
- ☒ $x_k = \dfrac{b-a}{n} \cdot k + a$
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus

3. Quelle formule correspond à l'approximation de $\displaystyle\int_1^3 x^2 dx$ par la somme de Riemann $\dfrac{b-a}{n} \sum_{k=1}^4 f(x_k)$, où $n = 4$ et où la subdivision est équidistante?

- ☐ $\dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k=0}^{4} (k^2 + k + 1)$
- ☐ $\dfrac{1}{4} \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \left(\dfrac{k^2}{4} + k + 1\right)$
- ☐ $\dfrac{1}{4} \displaystyle\sum_{k=0}^{4} (k^2 + k + 1)$
- ☒ $\dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \left(\dfrac{k^2}{4} + k + 1\right)$

☐ Aucune des réponses ci-dessus

4. Quelle formule correspond à l'approximation de $\int_1^3 x^2 dx$ par la méthode des trapèzes avec $n = 4$?

   ☐ $\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{4}(2k^2+6k+5)$

   ☒ $\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{4}(2k^2+6k+5)$

   ☐ $\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{4}(2k^2+6k+5)$

   ☐ $\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}(2k^2+6k+5)$

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

5. En utilisant la méthode des trapèzes pour approximer l'intégrale $\int_0^2 3x dx$, estimez la différence en valeur absolue, notée δ, entre cette approximation et la valeur exacte de l'intégrale.

   ☐ $0.1 < \delta < 0.2$

   ☐ $0.01 < \delta < 0.02$

   ☐ $0.001 < \delta < 0.002$

   ☐ $0.0001 < \delta < 0.0002$

   ☒ Aucune des réponses ci-dessus

6. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des primitives de $f(x) = 2x(x^2+1)^8$?

   ☐ $F(x) = \frac{x^2}{9}(x^2+1)^9$

   ☒ $F(x) = \frac{1}{9}\left((x^2+1)^9+4\right)$

   ☒ $F(x) = \frac{1}{9}\left(\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}x^{2k}+4\right)$

   ☐ $F(x) = 32x^2\left(x^2+1\right)^7 + 2\left(x^2+1\right)^8$

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

7. Quelles sont les égalités correctes ?

   ☐ $\int(1+x^2)e^{-x}dx = -2xe^{-x} + \int(1+x^2)e^{-x}dx$

   ☐ $\int(1+x^2)e^{-x}dx = x^2\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\right)e^{-x} + \int x^2\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\right)e^{-x}dx$

   ☐ $\int(1+x^2)e^{-x}dx = -2xe^{-x} - \int(1+x^2)e^{-x}dx$

- ☐ $\displaystyle\int (1+x^2)e^{-x}dx = x^2\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\right)e^{-x} - \int x^2\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\right)e^{-x}dx$
- ☒ Aucune des réponses ci-dessus

8. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des primitives de $f(x) = x\sqrt{1+x}$?
(Indication: faire une intégration par parties.)
   - ☐ $F(x) = \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2}$
   - ☐ $F(x) = \frac{2}{15}(3x+2)(1+x)^{3/2}$
   - ☒ $F(x) = \frac{2}{15}(3x-2)(1+x)^{3/2}$
   - ☐ $F(x) = \frac{2}{5}x(1+x)^{3/2}$
   - ☐ Aucune des réponses ci-dessus

9. Quelles sont les fonctions $f(u)$ et $g(x)$ telles que
$$\int \frac{x}{x-4}dx = \int f(g(x)) \cdot g'(x)dx\ ?$$
   - ☒ $f(u) = e^u + 4$ et $g(x) = \ln(x-4)$
   - ☐ $f(u) = e^{u+4}$ et $g(x) = \ln(x) - 4$
   - ☐ $f(u) = \ln(u-4)$ et $g(x) = e^x + 4$
   - ☐ $f(u) = \ln(u) - 4$ et $g(x) = e^{x+4}$
   - ☐ Aucune des réponses ci-dessus

10. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des primitives de $h(x) = (3x^3-1)^{16}8x^2$?
(Indication: faire une intégration par substitution.)
    - ☒ $H(x) = \frac{1}{153}\left(23 + 8(3x^3-1)^{17}\right)$
    - ☒ $H(x) = \frac{8}{153}(3x^3-1)^{17}$
    - ☐ $H(x) = \frac{1}{136}\left(23 + 9(3x^3-1)^{17}\right)$
    - ☐ $H(x) = \frac{9}{153}(3x^3-1)^{17}$
    - ☐ Aucune des réponses ci-dessus

Exercise 2:
Calculer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes:

1. $f(x) = x^2 - 2x + 3$
2. $g(x) = x^{2\alpha+1}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1 \Rightarrow 2\alpha+1 \neq 1$

3. $h(x) = (x+1)^2$
4. $i(x) = exp(2x+5)$
5. $j(x) = x^2 + \frac{1}{x}$
6. $l(x) = \frac{1+x}{(1-x)x}$ (Indication: écrire la fonction sous la forme $\frac{A}{1-x} + \frac{B}{x}$)
7. $m(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Solutions

1. $\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C$
2. $\frac{x^{2(1+\alpha)}}{2(1+\alpha)} + C$
3. $\frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$
4. $\frac{exp(2x+5)}{2} + C$
5. $\frac{x^3}{3} + \ln(|x|) + C$
6. $l(x) = \frac{1+x}{(1-x)x} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{x} = \frac{Ax+B(1-x)}{(1-x)x} = \frac{B+(A-B)x}{(1-x)x} \Leftrightarrow A = 2, B = 1$
   $l(x) = \frac{1+x}{(1-x)x} = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}$
   $\int l(x)dx = -2\ln|1-x| + \ln|x| + C$
7. Nous remarquons que le numérateur correspond à la dérivée du dénominateur,nous avons que $m(x)$ est égal à la dérivée de $(\ln(e^x + e^{-x}) + C)$.
   $\int m(x) = (\ln(e^x + e^{-x}) + C)$

Exercise 3:
Calculer les intégrales suivantes:

1. $\int_0^1 xe^{-x}\mathrm{d}x$
2. $\int_0^1 x2^x\mathrm{d}x$
3. $\int_2^3 \ln(x^2-1)\mathrm{d}x$
4. $\int_0^1 \left(x^2+1\right)\cos(x)\mathrm{d}x$
5. $\int_1^e x\ln(x)\mathrm{d}x$

Solutions

1. $1 - \frac{2}{e}$

2. $\frac{2\ln(2)-1}{(\ln(2))^2}$
3. $10\ln(2) - 3\ln(3) - 2$
4. $2\cos(1)$
5. $\frac{1}{4}\left(e^2 + 1\right)$