Exercise 1:

1. On considère la fonction $f(x,y) = 2x + x^2y^3$. Que vaut $f(-2,3)$?

   - ☐ 32
   - ☒ 104
   - ☐ 112
   - ☐ -66
   - ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

2. Parmi les points suivants, lesquels se trouvent sur la surface correspondant au graphe de la fonction $f(x,y) = 12x^{-2}y$?

   - ☐ $(2,1,6)$
   - ☐ $(-1/2, 1/3, -1)$
   - ☐ $(1,-2,24)$
   - ☐ $(0,1,1)$
   - ☒ Aucune des réponses ci-dessus.

3. On considère la fonction $f(x,y) = xy^2$, un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et un nombre $h > 0$. Que vaut $f(a,b+h) - f(a,b)$?

   - ☐ $2abh + bh^2$
   - ☐ b^2h
   - ☐ ah^2
   - ☒ $2abh + ah^2$
   - ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

4. On considère la fonction $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$. Quelles sont les égalités correctes parmi les suivantes?

   - ☒ $4f(x,y) = f(2x,2y)$
   - ☐ $2f(x,y) = f(x,2y)$
   - ☐ $4f(x,y) = f(2x,y)$
   - ☐ $2f(x,y) = f(2x,2y)$
   - ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

5. Parmi les ensembles suivants, le(s)quel(s) correspond(ent) au domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction $f(x,y) = \sqrt{2-(x^2+y^2)}$?

   - ☒ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leqslant 2\}$
   - ☐ $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 = 2\}$
   - ☐ $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \geqslant 2\}$
   - ☒ $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 > 2\}$

☐ Aucune des réponses ci-dessus.

6. Quelle(s) valeur(s) de $x \in \mathbb{R}$ satisfait(ont) l'équation $f(x,3) = 9$, où $f(x,y) = \dfrac{1}{12}x^3(y+1)^2$?

   ☐ $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{1/3}$
   ☒ $\left(\dfrac{27}{4}\right)^{1/3}$
   ☒ $\dfrac{3}{4^{1/3}}$
   ☐ $\dfrac{4}{3^{1/3}}$
   ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

7. On considère l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 3\}$ et $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - x^2 + 2 - y^2$. Quelles sont les affirmations correctes parmi les suivantes ?

   ☐ A est une courbe de niveau $\sqrt{3}+1$ de f
   ☒ A est une courbe de niveau $\sqrt{3}-1$ de f
   ☐ A est une courbe de niveau $\sqrt{3}$ de f
   ☐ A est une courbe de niveau $-\sqrt{3}$ de f
   ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

8. On considère $f(x,y) = e^{x+y}$. Quelles sont les égalités correctes ?

   ☒ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x+y}$
   ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{x+y}$
   ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xe^{x+y}$
   ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x+y)e^{x+y}$
   ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

9. On considère $f(x,y) = \ln(xy)$, où $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Quelles sont les égalités correctes ?

   ☒ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{x}$
   ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{y}$
   ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{xy}$
   ☒ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y}{xy}$
   ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

10. On considère $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Quelles sont les égalités correctes ?

   ☐ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

   ☒ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

   ☐ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{-xy}{(x^2+y^2)^{1/2}}$

   ☐ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{1/2}}$

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

Exercise 2:
On considère la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si}(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ lorsque$(x,y) \neq (0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{xy^3}{x^2+y^2}) = \frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ lorsque $(x,y) \neq (0,0)$ en utilisant la définition des dérivées partielles.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to\infty} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to\infty} \frac{\frac{h\cdot 0^3}{h^2+0^2}-0}{h} = \lim_{h\to\infty} \frac{\frac{0}{h}}{h} = 0 \end{aligned}$$

3. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ (dérivée de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ par rapport à y au point $(0,0)$) et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ (dérivée de $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ par rapport à x au point $(0,0)$) en utilisant la définition des dérivées partielles. Que peut-on constater ?

On peut écrire:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si}(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

On chercher à calculer la dérivée partielle de cette fonction par rapprot à y:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3(h^2-0^2)}{(0^2+h^2)^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1 \end{aligned}$$

Et ensuite, on veut faire de même en changeant l'ordre de dérivation. On obtient d'abord:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^3y^2+2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si}(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Puis,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \end{aligned}$$

On constate donc que les dérivées croisées ne sont pas égales en (0,0):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \neq 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Exercise 3:

Donner le domaine de définition et calculer les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes:

1. $f(x,y) = ye^x + xe^y$

$$\begin{aligned} &D_f = \mathbb{R}^2 \\ &\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^x + e^y \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ye^x \end{aligned}$$

Similairement pour les dérivées partielles première et seconde par rapport à y.

2. $g(x,y) = 12xy - x^2y - xy^2$

$$\begin{aligned} &D_f = \mathbb{R}^2 \\ &\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 12y - 2xy - y^2 \\ &\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -2y \end{aligned}$$

Similairement pour les dérivées partielles première et seconde par rapport à y.

3. $h(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

$$\begin{aligned} &D_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \\ &\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} \\ &\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

Similairement pour les dérivées partielles première et seconde par rapport à y.

4. $i(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\begin{aligned} &D_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \\ &\frac{\partial i}{\partial x}(x,y) = -x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

Similairement pour les dérivées partielles première et seconde par rapport à y.

5. $j(x,y) = \ln(y-2x^2)$

$$\begin{aligned} &D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y - 2x^2 > 0\} \\ &\frac{\partial j}{\partial x}(x,y) = \frac{-4x}{y-2x^2} \\ &\frac{\partial^2 j}{\partial x^2} = \frac{-4y-8x^2}{(y-2x^2)^2} \\ &\frac{\partial j}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y-2x^2} \\ &\frac{\partial^2 j}{\partial y^2} = -\frac{1}{(y-2x^2)^2} \end{aligned}$$

6. $k(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-17}$

$$\begin{aligned} &D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 - 17 \geq 0\} \\ &\frac{\partial k}{\partial x}(x,y) = x(x^2+y^2-17)^{-\frac{1}{2}} \\ &\frac{\partial^2 k}{\partial x^2} = (x^2+y^2-17)^{-\frac{1}{2}} - x^2(x^2+y^2-17)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Similairement pour les dérivées partielles première et seconde par rapport à y.

7. $l(x,y) = \ln(x^2y + xy - 2y)$

$$\begin{aligned} &D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + xy - 2y > 0\} \\ &\frac{\partial l}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy+y}{x^2y+xy-2y} \\ &\frac{\partial^2 l}{\partial x^2} = \frac{2y(x^2y+xy-2y) - 2x(2xy+y)}{(x^2y+xy-2y)^2} \end{aligned}$$

Similairement pour les dérivées partielles première et seconde par rapport à y.