

Exercice 1:

1. On considère la fonction $f(x, y) = \sqrt{6x - 8y}$. Quelle valeur approximative de $f(2.1, 1)$ obtient-on en utilisant l'approximation linéaire $t_{(x_0, y_0)}(2.1, 1)$ au point $(x_0, y_0) = (2, 1)$?
 - 2.125
 - 2.0125
 - 2.025
 - 2.25
 - Aucune des réponses ci-dessus
2. On considère la fonction $f(x, y) = xy^3 - 2x^3$. Quelle valeur approximative de $f(2.01, 2.98)$ obtient-on en utilisant l'approximation linéaire $t_{(x_0, y_0)}(2.01, 2.98)$ au point $(x_0, y_0) = (2, 3)$?
 - 36.95
 - 37.95
 - 39.95
 - 38.95
 - Aucune des réponses ci-dessus
3. Laquelle des expressions suivantes correspond à l'équation du plan tangent $t_{(x_0, y_0)}(x, y)$ de la fonction $f(x, y) = \ln(xy)$ au point $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, 2)$?
 - $2y - \frac{1}{2}x - 2$
 - $2y + \frac{1}{2}x - 2$
 - $2x + \frac{1}{2}y - 2$
 - $2x - \frac{1}{2}y - 2$
 - Aucune des réponses ci-dessus
4. Laquelle des expressions suivantes correspond à l'équation du plan tangent $t_{(x_0, y_0)}(x, y)$ de la fonction $f(x, y) = 4x^2 - y^2$ au point $(x_0, y_0) = (5, -8)$?
 - $16x - 40y - 36$
 - $16y + 40x + 36$
 - $40y + 16x - 36$
 - $16y + 40x - 36$
 - Aucune des réponses ci-dessus
5. En utilisant la différentielle, approximer la variation de la fonction $f(x, y) = 3x^2 - xy$ lorsque (x, y) varie entre $(1, 2)$ et $(1.01, 1.98)$ (poser $(x_0, y_0) = (1, 2)$).
 - $\frac{6}{10}$

- 0.006
 0.06
 0.6
 Aucune des réponses ci-dessus
6. Approximer la variation de la fonction $f(x) = x^2 - 3x^3y^2 + 4x - 2y^3 + 6$ en utilisant la différentielle, lorsque (x, y) varie entre $(-2, 3)$ et $(-2.02, 3.01)$ (poser $(x_0, y_0) = (-2, 3)$).
- 7.38
 7.39
 7.4
 7.37
 Aucune des réponses ci-dessus
7. On considère la fonction $f(x, y) = 6\sqrt[3]{x^2y}$. Pour lequel (ou lesquels), parmi les points suivant, l'approximation linéaire $t_{x_0, y_0}(x, y)$ au point $(x_0, y_0) = (1000, 125)$ est-elle la meilleure?
- (1000, 126)
 (1001, 125)
 (1001, 124.5)
 (1000.5, 125.5)
 Aucune des réponses ci-dessus
8. On considère la fonction $f(x, y) = x^4 + y^3 + 32x - 9y$. Au point $(x_0, y_0) = (2, -\sqrt{3})$, f admet
- un maximum local
 un minimum local
 un maximum global
 un point-selle
 Aucune des réponses ci-dessus
9. On considère la fonction $f(x, y) = -\frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{2}y^2 - 12y$. Combien de points critiques possède-t-elle ?
- 0
 1
 2
 4
 Aucune des réponses ci-dessus
10. On considère la fonction $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4y$. Parmi les points suivants, lesquels sont des points critiques de $f(x, y)$?
- (0, 2)

- (2, 0)
- (3, -2)
- (-3, 2)
- Aucune des réponses ci-dessus

Exercice 2:

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x, y) = 2x^3 - x^2 + 2xy + 5y^2$$

1. Calculer les dérivées partielles premières et secondes de la fonction f .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x^2 - 2x + 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x + 10y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x - 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 10$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2$$

2. Déterminer le(s) point(s) critique(s) de la fonction f . Conditions du premier ordre:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x^2 - 2x + 2y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x + 10y = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = \frac{2}{5} \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y = -\frac{2}{25} \text{ respectivement}$$

3. Déterminer si chaque point critique de la fonction f est un maximum local, un minimum local ou un point selle.

$$\Delta(x, y) = (12x - 2)10 - 2^2 = 120x - 20 - 4 = 120x - 24$$

a $\Delta(0, 0) = 24 > 0$ point selle

b $\Delta(\frac{2}{5}, -\frac{2}{25}) = \frac{14}{5} > 0$ minimum local

Exercice 3:

Discuter l'existence et la nature des extremums de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x, y) = \frac{a}{2}(x^2 + y^2) + xy - y + x + 7$$

en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$

On calcule les conditions du 1er ordre:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = ax + a + 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = ay + x - 1 = 0 \end{cases}$$

La première équation donne : $y = -ax - 1$ On remplace dans la deuxième : $-a^2x - a + x - 1 = 0$
 $\Rightarrow (1 - a^2)x - (1 + a) = 0 \Rightarrow (1 + a)[(1 - a)x - 1] = 0$ $a = -1$ ou $(1 - a)x = 1$ On peut distinguer 3 cas:

1. $a \neq \pm 1 \Rightarrow x = \frac{1}{1-a} \Rightarrow y = -\frac{a}{1-a} - 1 = -\frac{1}{1-a}$ On a un point critique : $\left(\frac{1}{1-a}, -\frac{1}{1-a}\right)$
2. $a = 1 \Rightarrow 0x = 1$ pas de solution On n'a pas de point critique, donc pas d'extremum dans ce cas.
3. $a = -1 \Rightarrow y = x - 1$ Tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y = x - 1$ est un point critique.

On calcule les conditions du deuxième ordre:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = a, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = a, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1$$

$$\Rightarrow \Delta(x, y) = a^2 - 1 \text{ On a :}$$

$$\Delta(x, y) < 0 \Leftrightarrow -1 < a < 1$$

$$\Delta(x, y) > 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) < 0 \Leftrightarrow a < -1$$

$$\Delta(x, y) > 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) > 0 \Leftrightarrow a > 1$$

Comme les signes de dépendent pas de (x, y) , on peut examiner la concavité ou la convexité de la fonction f et tirer des conclusions globales sur les extremums.

On peut distinguer 4 cas:

1. $-1 < a < 1 \Rightarrow \Delta(x, y) < 0$
 $\Rightarrow f$ n'est ni concave ni convexe.
 $\Delta\left(\frac{1}{1-a}, -\frac{1}{1-a}\right) < 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{1-a}, -\frac{1}{1-a}\right)$ est un point selle.
2. $a > 1 \Rightarrow \Delta(x, y) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) > 0$
 $\Rightarrow f$ strictement convexe
 $\Rightarrow \left(\frac{1}{1-a}, -\frac{1}{1-a}\right)$ est un minimum global strict.
3. $a < -1 \Rightarrow \Delta(x, y) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) < 0$
 $\Rightarrow f$ strictement concave
 $\Rightarrow \left(\frac{1}{1-a}, -\frac{1}{1-a}\right)$ est un maximum global strict.
4. $a = -1 \Rightarrow \Delta(x, y) = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -1 < 0$
 $\Rightarrow f$ concave
Tout (x, y) tel que $y = x - 1$ est un maximum global.
(Notons que les conditions du deuxième ordre pour un extremum ne permettent pas de conclure dans ce cas)

Remarque: Si $a = 1$, la fonction f est convexe et n'a aucun extremum.