Exercise 1:

1. Sachant que $(0,0)$ est un point critique de $f(x,y) = x^3 + y^3$, le calcul du discriminant $D(0,0)$ est-il concluant pour déterminer sa nature (i.e., min, max ou point-selle)?

   ☐ oui

   ☒ non

2. On considère la fonction $f(x,y) = \ln(1 + x^2y^2)$. Combien y a-t-il de points critiques?

   ☐ 0

   ☐ 2

   ☐ 4

   ☒ une infinité

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

3. Laquelle des expressions suivantes correspond à l'expression du Lagrangien de la fonction $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2$ sous la contrainte $x^2 + 4y^2 = 16$?

   ☐ $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (\lambda - 1)x^2 + (1 + 4\lambda)y^2 + 2x - 16\lambda + 1$

   ☒ $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (1 - \lambda)x^2 + (1 - 4\lambda)y^2 + 2x + 16\lambda + 1$

   ☐ $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (\lambda - 1)x^2 + (4\lambda - 1)y^2 + 2x - 16\lambda + 1$

   ☒ $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = -\lambda(x^2 + 4y^2 - 16) + y^2 + x^2 + 2x + 1$

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

4. On considère la fonction $f(x,y) = x^2y^3$ sous la contrainte $x + y = 5$. Combien y a-t-il de points critiques?

   ☐ 1

   ☐ 2

   ☒ 3

   ☐ 4

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

5. La fonction $f(x,y) = x^2 - 3y^2$ sous la contrainte $x + 2y = 1$ possède

   ☒ un minimum sous contrainte

   ☐ un maximum sous contrainte

   ☐ un minimum sous contrainte et un maximum sous contrainte

   ☐ un minimum sous contrainte et deux maximum sous contrainte

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

6. Quels sont les points critiques de $f(x,y) = 81x^2 + y^2$ sous la contrainte $4x^2 + y^2 = 9$

   ☐ $\left(-\frac{3}{2}, 0\right); \quad \left(\frac{3}{2}, 0\right); \quad (-3, 0); \quad (3, 0),$

   ☒ $\left(-\frac{3}{2}, 0\right); \quad \left(\frac{3}{2}, 0\right); \quad (0, -3); \quad (0, 3),$

- ☐ $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$; $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$,
- ☐ $(-3, 0)$; $(3, 0)$,
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus

Exercise 2:

1) Déterminer les points critiques sous contraintes des fonctions données aux questions 3 et 4 du qcm.

2) Quelle est la nature des points critiques sous contraintes des fonctions données aux questions 3, 4 et 6 du qcm?

- $f(x, y) = (x+1)^2 + y^2$ sous la contrainte $x^2 + 4y^2 = 16$.

  Le système (non linéaire) d'équations correspondant aux conditions du premier ordre sur le lagrangien est
$$\begin{cases} 2x - 2\lambda &= -2 \\ 2y - 8\lambda y &= 0 \\ x^2 + 4y^2 &= 0 \end{cases}.$$
  Ce système admet quatre solutions : $(x = -4, y = 0, \lambda = \frac{3}{4})$, $(x = 4, y = 0, \lambda = \frac{5}{4})$, $(x = -\frac{4}{3}, y = \frac{4\sqrt{2}}{3}, \lambda = \frac{1}{4})$ et $(x = -\frac{4}{3}, y = -\frac{4\sqrt{2}}{3}, \lambda = \frac{1}{4})$.
  Le discriminant du problème vaut
$$D(x, y, \lambda) = (2 - 2\lambda)64y^2 + (2 - 8\lambda)4x^2.$$
  Il est négatif pour les deux premiers points critiques et il est positif pour les deux derniers.
  La fonction f admet donc deux maximums sous la contrainte : $(-4, 0)$ et $(4, 0)$ et deux minimums sous la contrainte : $(-\frac{4}{3}, -\frac{4\sqrt{2}}{3})$ et $(-\frac{4}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3})$.

- $f(x, y) = x^2y^3$ sous la contrainte $x + y = 5$.
  En substituant x par $5 - y$ dans l'expression de f, le problème revient à étudier la fonction d'une variable :
$$h(y) = (5 - y)^2 y^3$$
  dont la dérivée vaut
$$h'(y) = 5y^2(5 - y)(3 - y).$$
  La fonction h admet trois points critiques : $y = 0$, $y = 5$ et $y = 3$. La fonction f admet donc trois points critiques sous la contrainte $x + y = 5$: $(5, 0)$, $(2, 3)$, $(0, 5)$ (pour trouver la valeur de x correspondant à chaque valeur de y il suffit d'utiliser l'égalité donnée par la contrainte).
  La dérivée seconde de h vaut
$$h''(y) = 5y\left[(5 - y)(3 - y) - y(3 - y) - y(5 - y)\right].$$
  Comme $h''(5) > 0$, le point critique $(0, 5)$ est un minimum de f sous contrainte.
  Comme $h''(3) < 0$, le point critique $(2, 3)$ est un maximum de f sous contrainte.
  Comme $h''(0) = 0$, on ne peut pas conclure sur la nature du point critique $(5, 0)$.

- $f(x,y) = 81x^2 + y^2$ sous la contrainte $4x^2 + y^2 = 9$.
  Le système d'équations (non linéaire) correspondant aux conditions du premier ordre du lagrangien est
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(81-4\lambda) & = & 0 \\ y(1-\lambda) & = & 0 \\ 4x^2+y^2 & = & 9 \end{array} \right. .$$
  Ce système admet quatre solutions : $(x=0, y=-3, \lambda=1)$, $(x=0, y=3, \lambda=1)$, $(x=-\frac{3}{2}, y=0, \lambda=\frac{81}{4})$ et $(x=\frac{3}{2}, y=0, \lambda=\frac{81}{4})$. Le discriminant du problème est
$$D(x,y,\lambda) = (162-8\lambda)4y^2 + (2-2\lambda)64x^2.$$
  Comme $D(x=0, y=-3, \lambda=1) > 0$ et $D(x=0, y=3, \lambda=1) > 0$, $(x=0, y=-3)$ et $(x=0, y=3)$ sont des minimums de f sous la contrainte.
  Comme $D(x=-\frac{3}{2}, y=0, \lambda=\frac{81}{4}) < 0$ et $(x=\frac{3}{2}, y=0, \lambda=\frac{81}{4}) < 0$, $(x=-\frac{3}{2}, y=0)$ et $(x=\frac{3}{2}, y=0)$ sont des maximums de f sous la contrainte.